1. 다음 보기 중 집합인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ 4 보다 작은 자연수의 모임

㉡ 피아노를 잘 치는 사람의 모임

㉢ 1 보다 크고 2 보다 작은 자연수의 모임

㉣ 7 의 배수의 모임

㉤ 수 30341 에 나타나 있는 숫자의 모임

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉡ '잘치는' 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.

2. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$, $B = \{x \mid x$는 9의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$

② $n(A) < n(B)$

③ $6 \notin B$

④ $B = \{1,\ 3,\ 9\}$

⑤ 집합 A, B 는 모두 유한집합이다.

해설

② $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이므로 $n(A) > n(B)$ 이다.

3. 집합 $A = \{2a - b | 3a + 2b \leq 10,\ a,\ b$는 자연수$\}$일 때, 다음 중 집합 A와 서로 같은 것은?

① $\{x | -1 < x < 3,\ x$는 정수$\}$ ② $\{x | -1 \leq x \leq 3,\ x$는 정수$\}$

③ $\{x | 1 < x < 5,\ x$는 자연수$\}$ ④ $\{x | 1 \leq x \leq 3,\ x$는 자연수$\}$

⑤ $\{x | 1 \leq x \leq 5,\ x$는 자연수$\}$

해설

$3a + 2b \leq 10$ 을 만족하는 자연수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 $(a, b) = (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2)$ 이므로, $2a - b = \{1,\ 0,\ -1,\ 3,\ 2\}$

$\therefore\ A = \{x | -1 \leq x \leq 3,\ x$는 정수$\}$

4. 집합 $A = \{x \mid x$는 6 이하의 짝수$\}$ 일 때, A 의 진부분집합을 모두 구한 것은?

① $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}$

② $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}$

③ $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 6\}$

④ $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$

⑤ $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$

해설

$A = \{2, 4, 6\}$

집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합 :

$\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$

집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 진부분집합 :

$\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$ 이므로 ⑤이다.

5. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 원소의 개수는 4 개이므로, $2^4 = 16$ (개)

6. 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{a, c, e\}$ 를 만족하는 X 의 부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$A-X = \{a,\ c,\ e\}$ 이므로 X 는 $a,\ c,\ e$ 를 원소로 가져서는 안된다.
따라서 X 는 $\{b,\ d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore\ 2^2 = 4(\text{개})$

7. 세 집합 $A = \{1, 5, 7, 11\}$, $B = \{x | x$는 12의 약수$\}$, $C = \{x \mid x$는 10미만의 2의 배수$\}$ 에 대하여 $n(B \cap (A \cup C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
$C = \{2, 4, 6, 8\}$ 이다.
$(A \cup C) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$ 이고 이것과 B 의 교집합을 구하면
$\{1, 2, 4, 6\}$ 이다.
따라서 원소의 개수는 4 개이다.

8. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a\}, B=\{2,\ 3,\ a+1\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{2,\ 3\}$ 일 때, 집합 $A\cup B$는?

① $\{2,3\}$ ② $\{2,3,4\}$ ③ $\{3,4,5\}$

④ $\{1,2,3,4\}$ ⑤ $\{1,2,3\}$

해설

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$

따라서 $a=3$ 이다. $B=\{2,\ 3,\ 4\}$

$\therefore\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

9. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 10 개 ② 8 개 ③ 6 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$,
$(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$ 이므로
$(A \cap B) \subset X \subset A$
집합 X 는 3, 4 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

10. 두 집합 A, B는 다음과 같고, 집합 X의 원소가 집합 A의 원소에는 속하지만 집합 B의 원소에는 속하지 않을 때 집합 X의 원소들의 합은?

보기

$A = \{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10의 약수$\}$

① 0 ② 2 ③ 5 ④ 10 ⑤ 12

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$,

$\{x \mid x \in A$ 그리고 $x \notin B\} = A - B$이므로

$A - B = \{3,\ 7\}$

$\therefore 3 + 7 = 10$

11. 집합 $A = \{x|x\text{는 } 5\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 2,\ B - A = \{3,\ 7,\ 9\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

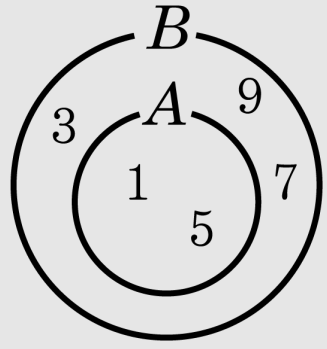
해설

$A = \{1, 5\},\ n(A \cap B) = 2$ 이므로

$A \cap B = A$

$\therefore A \subset B$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



12. 수진이네 반에서 매달 실시하는 수학 퀴즈 대회는 문제를 맞히는 모든 사람에게 도서 상품권을 준다고 한다. 다음은 이번 달 수학 퀴즈 문제에 대하여 5 명의 학생들이 답을 적어 제출한 것이다. 이때, 도서상품권을 받을 사람은 누구인지 말하여라.

> 문제) 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B - A = \varnothing$ 일 때, 두 집합 사이의 관계를 다른 방법으로 표현하여라.
> 서준 : $A \subset B$
> 성진 : $A - B = \varnothing$
> 유진 : $A^c \cap B = \varnothing$
> 명수 : $B^c \subset A^c$
> 형돈 : $(A \cup B) - B = \varnothing$

▶ 답 :

▷ 정답 : 유진

해설

$B - A = \varnothing$ 일 때, $B \subset A$ 이다.
따라서 $A^c \cap B = \varnothing$, $B - A = \varnothing$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{1, a, a+2\}, B = \{a-1, 5, 2\times a\}$ 에 대하여 $A - B = \{3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

해설

$A - B = \{3\}$ 이므로 $3 \in A$ 이다.

(1) $a = 3$ 일 때, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 5, 6\}$ 이고 $A - B = \{3\}$ 이다.

(2) $a+2 = 3$ 일 때, $A = \{1, 3\}, B = \{0, 2, 5\}$ 이므로 $A-B = \{1, 3\}$ 이다.

따라서 (1),(2) 에서 $a = 3$ 이다.

14. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A-B)\cap(A-C)$를 변형한 것으로서 틀린 것은?

① $A-(B\cup C)$ ② $(A-B)-C$ ③ $A\cap(B\cup C)^c$

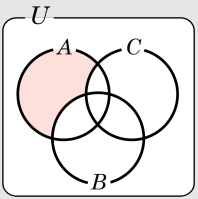
④ $A-(B-C)$ ⑤ $A\cap(B^c\cap C^c)$

해설

$(A-B)\cap(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)$
$=A\cap(B^c\cap C^c)$ $[\leftrightarrow (A\cap B^c)\cap C^c=(A-B)-C]$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$
위에서 ①, ②, ③, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

해설

$(A-B)\cap(A-C)$를 벤다이어그램으로 나타내면,



벤다이어그램을 보면서 비교하는 것도 좋다.

15. 자연수의 집합에서 자연수 k의 배수의 집합을 S_k로 표시할 때, $(S_4 \cap S_6) \supset S_k$ 일 때, k의 최솟값을 k_1, $(S_4 \cup S_6) \subset S_k$ 일 때, k의 최댓값을 k_2라 할 때, $k_1 + k_2$의 값은 ?

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 14

해설

$(S_4 \cap S_6) \supset S_{12}$ (12는 4 와 6 의 최소공배수)

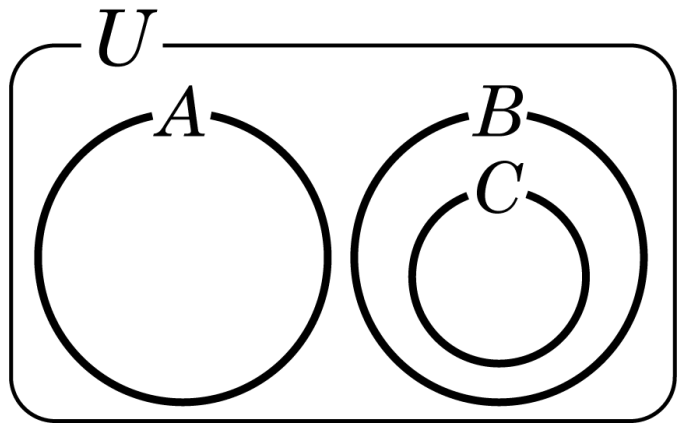
$\therefore$ 최솟값 : 12

$(S_4 \cup S_6) \subset S_2$ (2는 4 와 6 의 최대공약수)

$\therefore$ 최댓값 : 2

$\therefore k_1 + k_2 = 14$

16. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $A \cap B = \varnothing$ ② $B^c \subset C^c$ ③ $(A \cup B) \subset C$

④ $B \subset A^c$ ⑤ $A - B = A$

해설

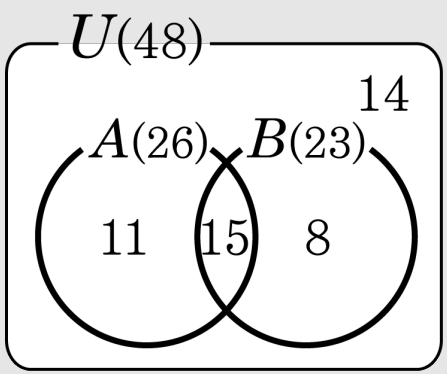
③ $C \subset (A \cup B)$

17. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 48$, $n(A) = 26$, $n(B) = 23$, $n(A - B) = 11$ 일 때, $n((A \cap B)^c)$ 는?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

해설

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B) = 48 - 15 = 33$

18. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 두 조건 $p : f(x) = 0$, $q : g(x) = 0$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 조건 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 을 만족하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P - Q$

④ $Q - P$ ⑤ $P^c \cup Q^c$

해설

조건 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 을 만족시키는 집합은
$\{x \mid f(x) = 0$이고 $g(x) = 0\}$ 이므로
주어진 조건을 만족하는 집합은 $P \cap Q$

19. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0, y = 2$ ② $x = 1, y = 2$

③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ ④ $x = 1, y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

20. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r, s가 다음의 조건을 만족할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉢ $s \Rightarrow p$	㉣ $\sim s \Rightarrow \sim q$

① $s \Rightarrow p$ ② $p \Rightarrow r$ ③ $r \Rightarrow s$

④ $q \Rightarrow p$ ⑤ $p \Rightarrow s$

해설

네 명제 p, q, r, s를 정리하면

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $s \Rightarrow p$, $q \Rightarrow s$

즉, $p \Rightarrow q \Rightarrow r$, $p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로

옳지 않은 것은 ③ 이다.

21. 두 조건 $p : |x-h| \le 1, q : -3 \le x \le 6$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건일 때, 정수 h 의 개수는?

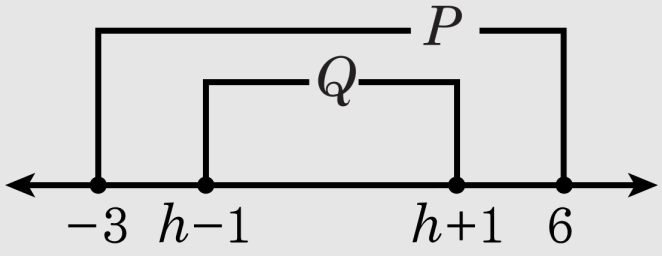
① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$P = \{x \mid h-1 \le x \le h+1\}$

$Q = \{x \mid -3 \le x \le 6\}$

$p \rightarrow q$(참) $\Rightarrow P \subset Q$



$-3 \le h-1, \quad h+1 \le 6$

$\therefore -2 \le h \le 5$

따라서 정수 h 의 개수는 8 개이다.

22. 실수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$임을 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$([가])$0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 A([나])B이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

① $>, \geq$ ② $\geq, \geq$ ③ $>, >$ ④ $<, \geq$ ⑤ $\leq, \leq$

해설

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
($a,\ b$가 실수이므로)
$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

23. $x>0,\ y>0,\ \ x+2y=1$ 일 때, $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$x>0,\ y>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$x+2y=1\geq 2\sqrt{2xy},\ \frac{1}{2}\geq \sqrt{2xy},\ \frac{1}{8}\geq xy$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$ 이므로 $xy=\frac{1}{8}$ 일 때 최소

$\therefore\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geq 8$

해설

$x+2y=1$ 이면 $y=\frac{1-x}{2}$

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{\frac{1-x}{2}}=\frac{2}{x}+\frac{2}{1-x}=\frac{2}{x(1-x)}$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

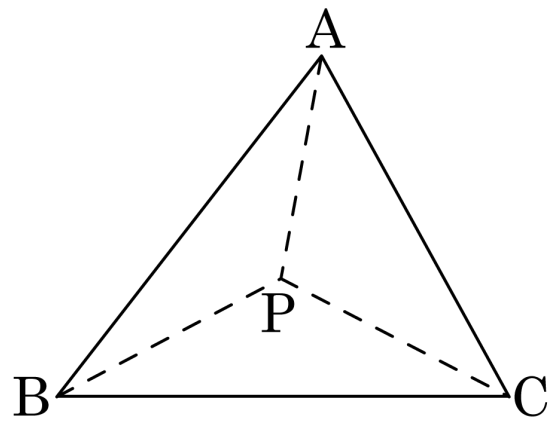
$x(1-x)=-x^2+x=(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}$

$=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

$\therefore\ x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

이때 $\frac{2}{x(1-x)}$ 의 최솟값은 $\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$

24. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$의 최솟값은?



① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1 + S_2 + S_3 = a$

$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$

$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$

25. 정의역이 X인 두 함수 $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2 - 2x$가 서로 같은 함수일 때, 집합 X로 적당한 것은?

① $\{-1, 0, 1\}$ ② $\{0, 1, 2\}$ ③ $\{1, 2, 3\}$

④ $\{-2, 0, 2\}$ ⑤ $\{0, 1, 4\}$

해설

$f(x) = g(x)$ 에서

$x^3 = 3x^2 - 2x$, $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$, $x(x-2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 0,\ 2,\ 1$

따라서 집합 X로 적당한 것은 $\{0,\ 1,\ 2\}$ 이다.

26. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore$ $x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$-a + b = 3$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$

$\therefore$ $a + b = 1$

27. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.

㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.

㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$

㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$

그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$

㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

28. 집합 $\mathrm{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\mathrm{B} = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

29. 함수 $f(x)=\begin{cases}2(x\geq 1)\\1(x<1)\end{cases}$ 에서 $y=(f\circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x\geq 1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$

ii) $x<1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore\ y=(f\circ f)(x)=2$

30. 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = -6x + 17$, $h(x) = 2x + 4$ 를 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}(5)$

$(f \circ g)(x) = -6x + 17$

$\Rightarrow \ y = -6x + 17$

$\Rightarrow \ x = -6y + 17$

$\Rightarrow \ y = -\frac{1}{6}x + \frac{17}{6} \cdots (f \circ g)^{-1}(x)$

$h(x) = 2x + 4$, $y = 2x + 4$

$\Rightarrow \quad x = 2y + 4$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 2 \cdots h^{-1}(x)$

$\therefore \quad h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}(5) = h^{-1}(2) = -1$

31. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하시오.

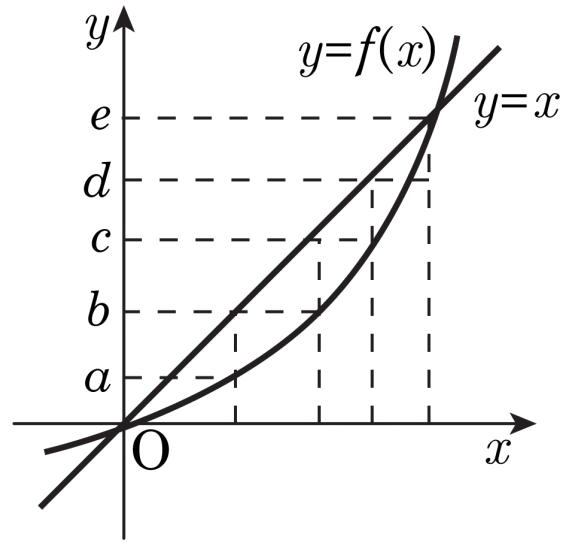
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$\therefore\ f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

32. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. $(f\circ f\circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\ &= f^{-1}(f^{-1}(b))\\ &= f^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

33. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 갯수를 구하여라.

$$B \subset A$$
$$2 \in B$$
$$n(B) = 3$$

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

집합 B 는 원소 2 를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3 개인 집합 A 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합 B 를 구하면
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\},$
$\{2, 4, 5\}$ 이고, 총 6 개이다.

34. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 이라는 것은 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 가 공집합이라는 것을 뜻한다.

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$

$\rightarrow A = B$

따라서, 집합 B 의 원소의 합은 16

35. (가) 고등학교 1 학년 630 명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400 명, 제주도를 관광한 학생은 330 명이였다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m+M$ 의 값은?

① 200 명 ② 330 명 ③ 430 명

④ 500 명 ⑤ 530 명

해설

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=730-n(A\cup B)\cdots\cdots$ ㉠

i) $n(A\cap B)$가 최대일 경우 → 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.

$\therefore n(A\cap B)=330\cdots\cdots(M)$

ii) $n(A\cap B)$ 가 최소인 경우 →

㉠에서 $n(A\cup B)$ 가 최대일 때이다.

$\therefore n(A\cup B)=n(U)=630$

$\Rightarrow n(A\cap B)=100\cdots\cdots(m)$

$M+m=330+100=430$

36. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$ ② $a=2b$ ③ $a=b$

④ $a^2=b$ ⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}$ 일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

37. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ $f(3)=4$

㉡ $0 \le f(n) \le 4$

㉢ $f(n)=2$인 자연수 n은 없다.

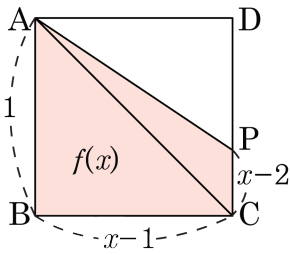
① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

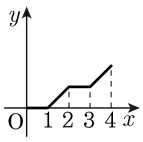
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

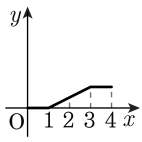
해설

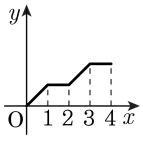
㉠. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한
일의 자리수이므로 $3^2=5\times1+4=14_{(5)}$에서
$f(3)=4$ ∴ 참
㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는
$0,1,2,3,4$만이 올 수 있으므로
$0 \le f(n) \le 4$ ∴ 참
㉢. $f(n)=2$이므로
$n^2=p_k5^k+p_{k-1}5^{k-1}+\cdots+p_25^2+p_1\cdot5+2$
$(p_i=0,1,2,3,4)$의 꼴로 나타낼 수 있다.
즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.
그런데 정수 l에 대하여
i) $n=5l$이면 $n^2=25l^2$
즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ii) $n=5l+1$이면 $n^2=(5l+1)^2=25l^2+10l+1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
iii) $n=5l+2$이면 $n^2=(5l+2)^2=25l^2+20l+4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
iv) $n=5l+3$이면 $n^2=(5l+3)^2=25l^2+30l+5+4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
v) $n=5l+4$이면 $n^2=(5l+4)^2=25l^2+40l+15+1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n은 i), ii), iii), iv), v)중
어느 한 꼴로 표현이 가능하므로
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
∴ 참

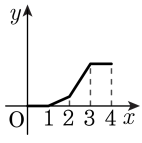
38. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

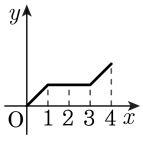


① 

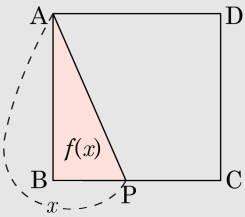
② 

③ 

④ 

⑤ 

해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le 1)\\ \frac{1}{2}(x-1) & (1\le x\le 2)\\ \frac{1}{2}(x-1) & (2\le x\le 3)\\ 1 & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

39. 함수 $f_n(x)$가 $f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의될 때, $f_{28}\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\dfrac{1}{20}$ ② $\dfrac{1}{24}$ ③ $\dfrac{1}{30}$ ④ $\dfrac{1}{32}$ ⑤ $\dfrac{1}{40}$

해설

$f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)$ 이므로

$$f_2(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x)=\frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

$$f_{28}(x)=\frac{x}{28x+1}$$

$$\therefore\ f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\dfrac{1}{2}}{15}=\frac{1}{30}$$

40. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

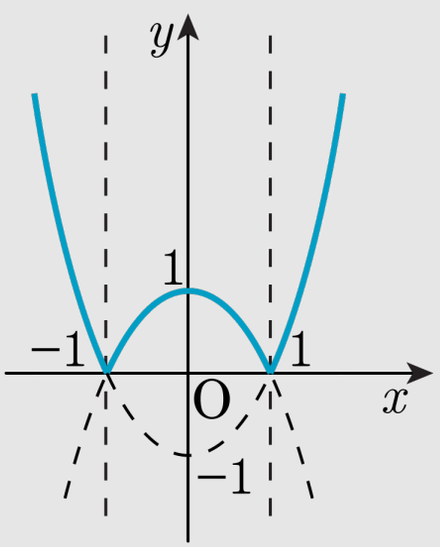
▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따 라 서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$



$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.