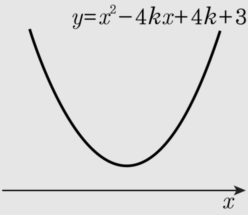
1. 두 함수 $y=x^2-2kx+4k$, $y=2kx-3$의 그래프에 대하여 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $-\frac{7}{9}<k<-\frac{11}{6}$ ② $-\frac{1}{4}<k<-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{1}{3}<k<0$
④ $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{7}{5}$

해설

함수 $y=x^2-2kx+4k$ 의 그래프가 직선 $y=2kx-3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면
$y=x^2-2kx+4k>2kx-3$,
즉 $x^2-4kx+4k+3>0$ 이 항상 성립해야 한다.
이 때, 이 부등식이 항상 성립하려면 그림과 같이 $y=x^2-4kx+4k+3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로



$\frac{D}{4}=4k^2-4k-3<0$, $(2k+1)(2k-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$

2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2,\ c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

3. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

4. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 2ax - 2a - 4 \\
&= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4
\end{aligned}
$$

y 의 최솟값 : $m = -\dfrac{a^2}{2} - 2a - 4$

$$= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2$$

m 의 최댓값 : -2

5. $x+y=3,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\ge 0,\ y\ge 0$ 이므로

$y=-x+3\ge 0 \ \rightarrow\ -x\ge -3\ \rightarrow\ x\le 3 \therefore\ 0\le x\le 3\ (\because\ x\ge 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore\ x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore\ M-m=12$

6. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$

$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$

$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$

$x,\ y$는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$

따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은

$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

7. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\dfrac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

8. 방정식 $x^{11}=1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$ 의 값은?

① 1　② -1　③ i　④ $-i$　⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$ 이므로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x=-1$ 을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

9. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

10. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면

$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

$$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$$

여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0,\ (X+7)(X-2)=0$

$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$

(i) $X=-7$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore\ \frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

(i), (ii)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$$이다.

11. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ a=2,\ b=0$

12. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$

$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$

$\therefore\ a+b=-10$

13. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　② $-1+\sqrt{2}$, -3　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

14. $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$를 만족하는 실수 a, b를 구하면?

① $a = -1,\ b = 2$　② $a = 2,\ b = -3$　③ $a = -3,\ b = 1$

④ $a = -1,\ b = 1$　⑤ $a = 1,\ b = 2$

해설

$x^3 - 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근이 w이다.

$\therefore\ w^3 = 1,\ w^2 + w + 1 = 0$

$\Rightarrow\quad w^2 = -w - 1$

$\therefore\ 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$

$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$

$= 1 + 2w + 3(-w-1) + 4$

$= -w + 2$

$\therefore\ -w + 2 = aw + b$

$a,\ b$는 실수이고, w는 허수이므로

$a = -1,\ b = 2$