

1. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
③ $|a|^2 = a^2$
④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \quad (\text{③이 쓰임}) \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\text{①이 쓰임}) \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \quad (\text{④가 쓰임}) \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \quad (\text{⑤가 쓰임}) \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

2. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

3. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $q \rightarrow r$
- ② $\sim p \rightarrow \sim r$
- ③ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ④ $p \rightarrow r$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.
 $p \rightarrow q (T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p (T)$
 $\sim r \rightarrow \sim q (T) \Rightarrow q \rightarrow r (T)$
 $p \rightarrow q \rightarrow r$ 이므로, $p \rightarrow r (T)$
 $\therefore \sim r \rightarrow \sim p (T)$

4. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) $p : a, b$ 는 유리수, $q : a + b, ab$ 는 유리수
(ii) $p : x$ 는 3의 배수, $q : x$ 는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

5. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?
- ① $\sim q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $p \leftrightarrow q$
④ $q \rightarrow p$ ⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\emptyset \cap Q) = P \cup \emptyset = P$
우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$
 $\therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.