1. 조건제시법으로 나타낸 집합 A의 원소들의 합을 구하여라.
$A = \{x \mid x = a + 2b,\ a,\ b$는 절댓값이 1이하인 정수$\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$|a| \le 1,\ |b| \le 1$ 인 정수이므로
$a = -1, 0, 1,\ b = -1, 0, 1$
$\therefore\ x \Rightarrow\ -1 + 2 \times (-1), -1 + 2 \times 0,\ -1 + 2\times 1,\ 0 + 2 \times (-1),$
$0 + 2\times 0, 0 + 2\times 1,\ 1 + 2 \times (-1),\ 1 + 2\times 0,\ 1 + 2\times 1$
$\Rightarrow -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$
$\therefore\ A = \{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이므로 원소들의 합은 0이다

2. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 2의 배수$\}$, $B = \{\varnothing,\ 1,\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$, $C = \{0,\ \varnothing,\ \{0,\ \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A)+n(B)-n(C)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x \mid x$는 10보다 작은 2의 배수$\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 이므로 $n(A) = 4$ 이고, $n(B) = 4$, $n(C) = 3$ 이므로 $n(A)+n(B)-n(C) = 5$ 이다.

3. 두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B$와 집합 B가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A가 될 수 <u>없는</u> 것은?

$A \cup B = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3 미만의 자연수$\}$

① $\{1,\ 4,\ 8\}$

② $\{x \mid x$는 12의 약수$\}$

③ $\{4,\ 8\}$

④ $\{x \mid x$는 8 이하인 4의 배수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 1보다 큰 8의 약수$\}$

해설

집합 $B = \{1,\ 2\}$이고, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로 집합 A는 원소 4, 8을 반드시 포함하는 $A \cup B$의 부분집합이다.
② $\{x \mid x$는 12의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} \not\subset \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

4. $A=\{5,9,12,14\}$, $B=\{3,5,\ a,\ a+3\}$ 이고 $A\cap B=\{5,9\}$ 일 때 집합 B 의 원소의 합은?

① 19　② 20　③ 21　④ 22　⑤ 23

해설

$A\cap B=\{5,9\}$ 이므로 $a=9$ 이거나 $a+3=9$ 이어야한다.
ⅰ) $a=9$ 일 때
$B=\{3,5,9,12\}$,교집합의 원소 중 12 는 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.
ⅱ) $a+3=9$ 즉, $a=6$ 일 때
$B=\{3,5,6,9\}$
따라서 원소들의 합은 23 이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 43$, $n(B) = 28$, $n(A \cup B) = 50$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - 28 = 22$
$n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 50 - 43 = 7$
$\therefore\ n(A - B) + n(B - A) = 22 + 7 = 29$

6. 재원이네 반 학생 42 명 중 야구를 좋아하는 학생이 26 명, 축구를 좋아하는 학생이 24 명이다. 야구와 축구를 둘 다 좋아하는 학생이 12 명 일 때, 야구와 축구를 모두 좋아하지 <u>않는</u> 학생 수는?

① 0 명 ② 1 명 ③ 2 명 ④ 3 명 ⑤ 4 명

해설

야구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라고 하면

$n(U) = 42,\ n(A) = 26,\ n(B) = 24,\ n(A \cap B) = 12$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 50 - 12 = 38$ 이므로

$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 42 - 38 = 4$

7. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$4a + 2a^2 - 6 = 0,\ 2a^2 + 4a - 6 = 0,$
$a^2 + 2a - 3 = 0,\ (a + 3)(a - 1) = 0$
$\therefore\ a = -3$ 또는 $a = 1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

8. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면?

㉠ $p : x = 1,\ q : x^2 - 4x + 3 = 0$
㉡ $p : 0 < x < 1,\ q : x < 2$
㉢ $p : a > b,\ q : a^2 > b^2$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

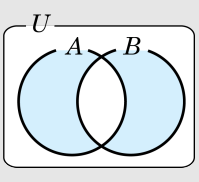
$P \subset Q \Rightarrow p \rightarrow q$가참
$p \rightarrow q$ 가 참이면 p 는 q 이기 위한 충분조건
㉢ $a = 1, b = -2 \Rightarrow a^2 < b^2$
$\therefore$ ㉠, ㉡ 참

9. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$　　② $B \subset A$　　③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$　　⑤ $A \cap B = B$

해설



$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A\end{aligned}$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A-B) \cup (B-A) = B-A$ 에서 $(A-B)$와 $(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A-B = \varnothing$ 가 되어야 한다. $A-B = \varnothing \leftrightarrow A \subset B$

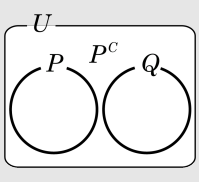
10. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \cap Q = \phi$　　② $P \subset Q$　　③ $Q \subset P$

④ $Q - P = \phi$　　⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \leftrightarrow P - Q^c = P \cap Q = \varnothing$



11. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

12. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)$

$= 5-\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right) \le 5-2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{4a}{b}} = 1$

13. $x > 0,\ y > 0,\ \ x + 2y = 1$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy},\ \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy},\ \frac{1}{8} \geq xy$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$ 이므로 $xy = \frac{1}{8}$ 일 때 최소

$\therefore\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$

해설

$x + 2y = 1$ 이면 $y = \frac{1-x}{2}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$x(1-x) = -x^2 + x = (x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$

$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

$\therefore\ x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

이때 $\frac{2}{x(1-x)}$ 의 최솟값은 $\frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

14. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

15. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots,\ 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, n 의 값을 구하여라.

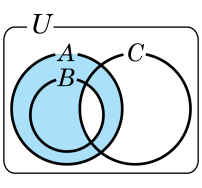
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4 의 약수 : 1, 2, 4
집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수는
$2^{n+1-3} = 64 = 2^6$ 이다.
$n + 1 - 3 = 6 \qquad \therefore\ n = 8$

16. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

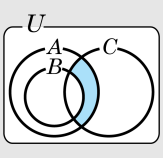


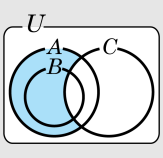
① $A-(B\cap C)$　　② $(A-B)\cap C$

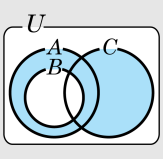
③ $(A\cup B)-C$　　④ $(A\cup C)-B$

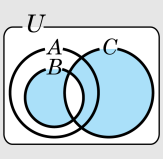
⑤ $(A\cap B)\cup C$

해설

②


③


④


⑤


17. 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$　　② $q \rightarrow p$　　③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$　　⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

18. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$　　② $a > c > b$　　③ $b > c > a$
④ $b > a > c$　　⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0$　$\therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$ $\left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

19. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$ Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$ Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$ 이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$