

1. 조건제시법으로 나타낸 집합 A 의 원소들의 합을 구하여라.

$$A = \{x \mid x = a + 2b, a, b \text{는 절댓값이 1이하인 정수}\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$|a| \leq 1, |b| \leq 1$ 인 정수이므로

$$a = -1, 0, 1, b = -1, 0, 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x &\Rightarrow -1 + 2 \times (-1), -1 + 2 \times 0, -1 + 2 \times 1, 0 + 2 \times (-1), \\ &0 + 2 \times 0, 0 + 2 \times 1, 1 + 2 \times (-1), 1 + 2 \times 0, 1 + 2 \times 1 \\ &\Rightarrow -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$\therefore A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 이므로 원소들의 합은 0이다

2. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{\emptyset, 1, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, $C = \{0, \emptyset, \{0, \emptyset\}\}$ 일 때, $n(A) + n(B) - n(C)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 $n(A) = 4$ 이고, $n(B) = 4$, $n(C) = 3$ 이므로 $n(A) + n(B) - n(C) = 5$ 이다.

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

$$A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 미만의 자연수}\}$$

- ① $\{1, 4, 8\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
- ③ $\{4, 8\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하인 } 4 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 큰 } 8 \text{의 약수}\}$

해설

집합 $B = \{1, 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 집합 A 는 원소 4, 8을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

② $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \not\subset \{1, 2, 4, 8\}$

4. $A = \{5, 9, 12, 14\}$, $B = \{3, 5, a, a + 3\}$ 이고 $A \cap B = \{5, 9\}$ 일 때 집합 B 의 원소의 합은?

① 19

② 20

③ 21

④ 22

⑤ 23

해설

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 $a = 9$ 이거나 $a + 3 = 9$ 이어야한다.

i) $a = 9$ 일 때

$B = \{3, 5, 9, 12\}$, 교집합의 원소 중 12는 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

ii) $a + 3 = 9$ 즉, $a = 6$ 일 때

$B = \{3, 5, 6, 9\}$

따라서 원소들의 합은 23이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 43$, $n(B) = 28$, $n(A \cup B) = 50$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - 28 = 22$$

$$n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 50 - 43 = 7$$

$$\therefore n(A - B) + n(B - A) = 22 + 7 = 29$$

6. 재원이네 반 학생 42 명 중 야구를 좋아하는 학생이 26 명, 축구를 좋아하는 학생이 24 명이다. 야구와 축구를 둘 다 좋아하는 학생이 12 명 일 때, 야구와 축구를 모두 좋아하지 않는 학생 수는?

① 0 명

② 1 명

③ 2 명

④ 3 명

⑤ 4 명

해설

야구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라고 하면

$$n(U) = 42, n(A) = 26, n(B) = 24, n(A \cap B) = 12 \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 50 - 12 = 38 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 42 - 38 = 4$$

7. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

8. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면?

㉠ $p : x = 1, q : x^2 - 4x + 3 = 0$

㉡ $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

㉢ $p : a > b, q : a^2 > b^2$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$P \subset Q \Rightarrow p \rightarrow q$ 가 참

$p \rightarrow q$ 가 참이면 p 는 q 이기 위한 충분조건

㉢ $a = 1, b = -2 \Rightarrow a^2 < b^2$

$\therefore$ ㉠, ㉡ 참

9. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$

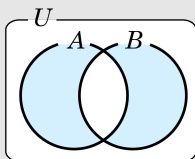
② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cap B = B$

해설



$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A\end{aligned}$$

$\therefore A - B = \emptyset$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 에서 $(A - B)$ 와 $(B - A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A - B = \emptyset$ 가 되어야 한다. $A - B = \emptyset \leftrightarrow A \subset B$

10. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. $\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \cap Q = \emptyset$

② $P \subset Q$

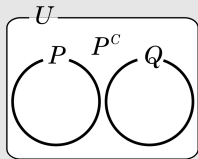
③ $Q \subset P$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $Q^c = P$

해설

$$P \subset Q^c \leftrightarrow P - Q^c = P \cap Q = \emptyset$$



11. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

12. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a - b) \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} \right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(a - b) \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} \right)$$

$$= 5 - \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \leq 5 - 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 1$$

13. $x > 0, y > 0, x + 2y = 1$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}, \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}, \frac{1}{8} \geq xy$$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \text{ 이므로 } xy = \frac{1}{8} \text{ 일 때 최소}$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$$

해설

$$x + 2y = 1 \text{ 이면 } y = \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$$x(1-x) = -x^2 + x = (x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$$

$$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$\therefore x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

$$\text{이때 } \frac{2}{x(1-x)} \text{ 의 최솟값은 } \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

14. 길이가 16 m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2

② 16 m^2

③ 25 m^2

④ 36 m^2

⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x + y) = 16 \quad x + y = 8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$$\therefore \text{넓이의 최대값} : 16(\text{m}^2)$$

15. 집합 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n+1-3} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$n + 1 - 3 = 6 \quad \therefore n = 8$$

16. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

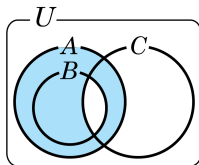
① $A - (B \cap C)$

② $(A - B) \cap C$

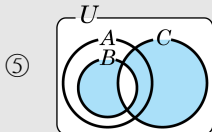
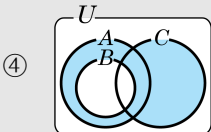
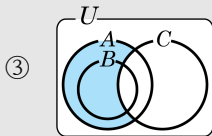
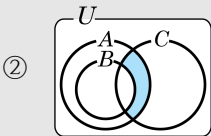
③ $(A \cup B) - C$

④ $(A \cup C) - B$

⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설



17. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$

② $q \rightarrow p$

③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

18. $a > 1$ 일 때 $b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, $c = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right)$ 이라 한다. a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
 ④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) - a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right)$$

그런데, $a > 1$ 이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore b < a$

$$\text{또, } b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \quad \left(\because a \neq \frac{1}{a} \right)$$

$$c - b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) - b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) < 0$$

$$\therefore c < b$$

$$\therefore a > b > c$$

19. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

I. $a + b + c \geq 3$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

III. $ab + bc + ca \geq 3$

IV. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① I, II

② I, III

③ III, IV

④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$ 이므로

I. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$

III. $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$

IV. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$

$\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$