1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$
② $x^2+y^2+2x-2y=2$
③ $x^2+y^2-2x+2y=2$
④ $x^2+y^2-2x-2y=2$
⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

2. 방정식 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 3$ ② $k > 3$ ③ $0 < k < 3$

④ $k > 2$ ⑤ $k < 2$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 을 완전제곱식으로
나타내면 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3 - k$
원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로
$\sqrt{3-k} > 0,\ 3 - k > 0 \quad \therefore\ k < 3$

3. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ············㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ············㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$일 때 $b = 4$, $a = 10$일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

4. 다음<보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,
$(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k$ 이다.
$y = 0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2 = 1-k$
$\Rightarrow$ $k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.
㉣ $x = 0$ 를 대입 후 정리하면,
$(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$
$\therefore$ $k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.
㉤ 중심이 $y = x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.
$\therefore$ (㉠,㉣,㉤) 가 참이다.

5. 두 점 A $(-3,\ 8)$, B $(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

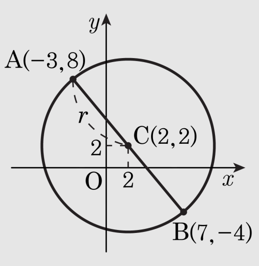
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$　　② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$　　④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

6. 세 점 $P(-2, -4)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 3)$ 을 지나는 원의중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$P(-2,\ -4),\ Q(1,\ 5),\ R(5,\ 3)$

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases}(-2-a)^2+(-4-b)^2=r^2 \ \cdots ㉠\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2 \ \cdots ㉡\\(5-a)^2+(3-b)^2=r^2 \ \cdots ㉢\end{cases}$$

㉠, ㉡식 연립 :

$a+3b=1\ \cdots$㉣

㉡, ㉢식 연립 :

$2a-b=2\ \cdots$㉤

㉢, ㉠식 연립 :

$a+b=1\ \cdots$㉥

㉣, ㉥ 연립하면 $b=0,\ a=1$

㉠식에 $(-2-1)^2+(-4-0)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=25$

$\therefore\ r=5$

$a+b+r=1+0+5=6$

7. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$ ② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ ④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$
$x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)
$x+y+k(x-2)=0$
이 직선은 항상 $(2,\ -2)$ 를 지난다.
따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2,-2)$ 이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

8. 원 $x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p+q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$을
표준형으로 고치면
$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-30a+48$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-30a+48)=5\pi(a-3)^2+3\pi$
따라서 $a=3$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(6,-3)$
$\therefore p=6,\ q=-3$
$\therefore p+q=3$

9. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2,\ r^2 - 6r + 5 = 0,\ (r-1)(r-5) = 0$
$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

10. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ⋯⋯㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

11. 두 정점 A$(0, 0)$, B$(0, 3)$ 에서의 거리의 비가 $2 : 1$ 인 점 P(x, y) 의 자취는?

① $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ② $x^2 + (y+4)^2 = 4$
③ $(x-4)^2 + y^2 = 4$ ④ $(x+4)^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

해설

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$
즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{x^2 + (y-3)^2\right\} = x^2 + y^2$
$3x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$
$\therefore x^2 + (y-4)^2 = 4$

12. $z = x + yi$($x,\ y$ 는 실수) 이고,

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수일 때, 점 $(x,\ y)$가 그리는 자취의 길이를 구하면?

(단, $xy \neq 0$)

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

$\dfrac{z}{1+z^2} = \dfrac{x+yi}{1+(x+yi)^2}$

$= \dfrac{x+yi}{1+x^2-y^2+2xyi}$

$= \dfrac{x+yi}{(1+x^2-y^2)+(2xyi)} \cdot \dfrac{(1+x^2-y^2)-(2xyi)}{(1+x^2-y^2)-(2xyi)}$ …… ①

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이려면 ① 의 분모가 실수이므로

분자의 허수부가 0 이어야 한다.

$\therefore$ (분자의 허수부)$= 0$ 에서

$y(1+x^2-y^2) - 2x^2y = 0$

$\therefore y(1-x^2-y^2) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$

($\because\ xy \neq 0$ 으로부터 $y \neq 0$)

따라서 점 $(x,\ y)$ 의 자취는 중심이 $(0,\ 0)$, 반지름이 1 인 원이다.

$\therefore$ 자취의 길이는 2π

13. 좌표평면에서 점 $C(2,3)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다.
이 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 하나의 접선을 그을 때, 그 접점을 Q, 원점을 O라 하자.
이 때, $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$ 를 만족시키는 점 P의 자취방정식을 구하면?

① $2x+3y=6$　② $x+y=2$　③ $3x+2y=6$
④ $2x-3y=6$　⑤ $3x-2y=6$

해설

점 $P(x,\ y)$와 $C(2,\ 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, $\overline{CQ}=1$
이고, $\triangle PCQ$가 직각삼각형이므로
피타고라스정리에 의하여
$\overline{PQ} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1}$
$\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{PQ}=\overline{OP}$ 이므로
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1} = \sqrt{x^2+y^2}$
$\therefore 2x+3y=6$

14. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=4$에 대하여 두 원이 외접할 때 a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}=2+1$

$\therefore a^2+b^2=9$

15. 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$과 $x^2+y^2-2x-1=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=5$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
③ $(x-3)^2+(y+1)^2=10$ ④ $(x+3)^2+(y-1)^2=10$
⑤ $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y-2+k(x^2+y^2-2x-1)=0$
이 원이 원점을 지나므로
$x=y=0$을 대입하면
$-2-k=0$
$\therefore\ k=-2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y-2-2(x^2+y^2-2x-1)=0$
$-x^2-y^2+6x-4y=0,$
$x^2+y^2-6x+4y=0$
$\therefore\ (x-3)^2+(y+2)^2=13$

16. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

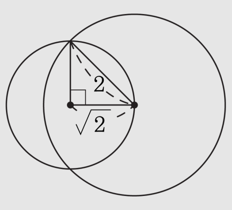
① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

17. 실수 a, b 와 두 원
A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,
B : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여
원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$
② $a+b=1$
③ $a-b=0$
④ $a^2+b^2=1$
⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설
원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 (1, 1) 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a-1)x+(b-1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 (1, 1) 을 지나므로
$(a-1)\times1+(b-1)\times1+1=0$
$\therefore a+b=1$

18. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

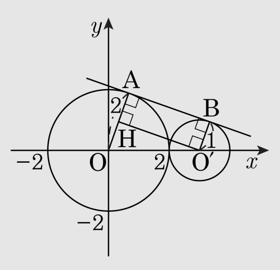
두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의
위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,
반지름의 길이가 r 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2}>1+r$
$5>1+r$
$\therefore 0<r<4$
따라서, 자연수 r 은 $1,2,3$ 으로 모두 3 개이다.

19. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



점 O′ 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH} = \overline{BO'} = 1$

$\therefore \overline{OH} = 2 - 1 = 1$

두 원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

20. 직선 $y=2x+b$ 와 원 $x^2+y^2=4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b<-\sqrt{5}$ 또는 $b>\sqrt{5}$
② $b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$
③ $b<-3\sqrt{5}$ 또는 $b>3\sqrt{5}$
④ $b<-4\sqrt{5}$ 또는 $b>4\sqrt{5}$
⑤ $b<-5\sqrt{5}$ 또는 $b>5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2+4bx+b^2-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(2b)^2-5(b^2-4)=-b^2+20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4}<0$ 에서 $-b^2+20<0, b^2-20>0$
$\therefore b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

21. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$
$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$
$\Rightarrow$ $k = \pm 2$
$\therefore$ $k = -2$ ($\because$ $k < 0$)

22. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x + y = k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$　② $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$　③ $-1 < k < 1$

④ $-2 < k < 2$　⑤ $-3 < k < 3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d가 반지름 r보다 작아야 한다.

즉 $d < r$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < 1$$

$\Rightarrow |-k| < \sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

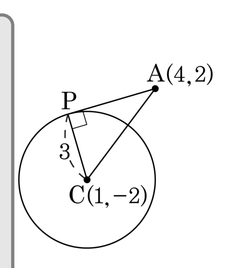
23. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



24. 직선 $(a-1)x-(a-2)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
따라서 원의 중심 $(1,2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1)\times 1-(a-2)\times 2-1=0$
$\therefore\ a=2$

25. 직선 $3x-y-1=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx\pm n$ 이라고 할 때, mn의 값은?

① $3\sqrt{10}$ ② $-3\sqrt{10}$ ③ 30
④ -30 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.
공식을 이용하면 접선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm 10$ 이므로
$m=3,\ n=10\ \therefore mn=30$

26. 점 $(1,\ 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 접선 중 x축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 식을
$y-2=m(x-1)$이라 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과
$y-2=m(x-1)$ 즉, $mx-y-m+2=0$까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$, $|-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-4m+4=4m^2+4$, $3m^2+4m=0$

따라서 기울기 $m=0,\ -\frac{4}{3}$ 이다.

x축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

27. 다음 <보기> 중에서 점 $(2,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 모두 고르면?

보기

㉠ $2x+y=4$	㉡ $x=2$
㉢ $3x+4y=10$	㉣ $3x-4y=2$

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉣

해설

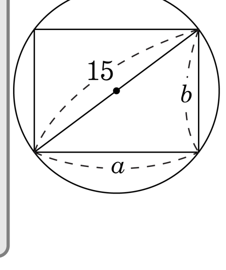
접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고
점 $(2,1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x-2)+1=mx-2m+1$
$\therefore mx-y-2m+1=0 \ \cdots$ ㉮
원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉮ 사이의 거리가
원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로
$\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, |-2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$
양변에 제곱을 하여 정리하면
$4m^2-4m+1=4m^2+4,$
$m=-\dfrac{3}{4}$을 ㉮에 대입하여 정리하면
$3x+4y-10=0$
한편, 점 $(2,\ 1)$에서
원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선 중
y축과 평행한 접선을 가지므로 $x=2$

28. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

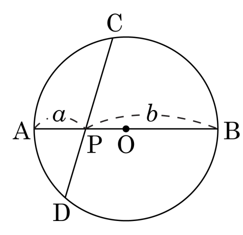
① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm
④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

i) $a+b=\frac{42}{2}=21$
ii) $a^2+b^2=15^2$
i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$
$\Rightarrow \quad a=12,\ 9$
$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



29. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}} = a$, $\overline{\mathrm{BP}} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
④ ab ⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}} \cdot \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{CP}} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab = \dfrac{a+b}{2} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DP}} = \dfrac{2ab}{a+b}$

30. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$ ② $(-1, 0)$, $(7, 0)$ ③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$
④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$ ⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 2)$, 접점을 Q라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이다.

31. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

32. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

(Ⅰ) 항상 $(0,\ 1)$과 $(-1,\ 0)$을 지난다.
(Ⅱ) $x-y+1=0$과 $x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다.
(Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅱ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어 직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도 $x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

33. 원 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2,\ 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\frac{14}{3}\pi$　② 5π　③ $\frac{16}{3}\pi$　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ $\frac{15}{4}\pi$

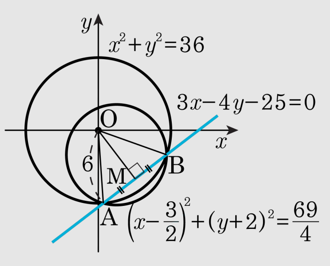
해설

x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(-2,\ 0)$ 을 지나므로
$(-2-a)^2+b^2=b^2 \ \Rightarrow\ a=-2$
$(x+2)^2+(y-b)^2=b^2$
$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 에 외접하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 길이 합과 같다.
$\Rightarrow\ \sqrt{(1+2)^2+(4-b)^2}=b+2$
$\Rightarrow\ b=\frac{7}{4}$
$\therefore 2\cdot\pi\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}\pi$

34. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$　② $2\sqrt{11}$　③ $3\sqrt{11}$　④ $4\sqrt{11}$　⑤ $5\sqrt{11}$

해설



두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

35. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교할 때 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1

36. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot3+4\cdot1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm10$

따라서, $a=3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

37. 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $ax + by + c = 0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \ge a$)

보기

㉠ $c = b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c = 2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \dfrac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ge \dfrac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ $(\because\ b \ge a)$

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

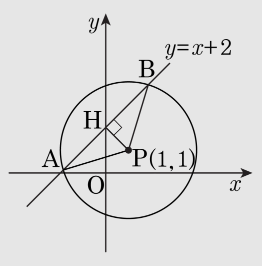
그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

38. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{PH} = \dfrac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$

$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$

따라서 $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$

39. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은
$x_1x+y_1y=5 \cdots$ ①
이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로
$3x_1+y_1=5 \cdots$ ②
또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$
위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=5 \cdots$ ③
② 에서 $y_1=5-3x_1$ 을 ③에 대입하면
$x_1^2+(5-3x_1)^2-5=0$,
$10x_1^2-30x_1+20=0$
$10(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$ 이면 $y_1=2$, $x_1=2$ 이면 $y_1=-1$
$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

40. 점 $(2,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식이 $y=a_1x+b_1, y=a_2x+b_2$일 때, $a_1a_2-b_1b_2$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

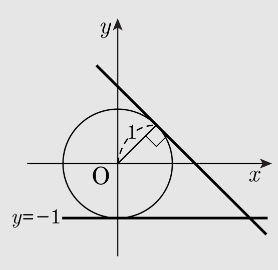
해설

접선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하면, $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=2a+b$ $\therefore\ b=-2a-1$

$y=ax-2a-1,\quad ax-y-2a-1=0$

원점과 접선과의 거리가 1이므로

$\frac{|-2a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$



$|-2a-1|=\sqrt{a^2+1}$

$4a^2+4a+1=a^2+1,\quad 3a^2+4a=0$

$\therefore\ a=0\ or\ -\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3},\ \ y=-1$

$\therefore\ a_1=-\frac{4}{3},\ \ a_2=0,\ \ b_1=\frac{5}{3},\ \ b_2=-1$

$\therefore\ a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2=0-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$

41. A(3, −1)에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x-2y-6=0,\ 2x+y-4=0$

② $x-2y-5=0,\ 2x+y-5=0$

③ $x-2y-4=0,\ 2x+y-5=0$

④ $x-2y-3=0,\ 2x+y-4=0$

⑤ $x-2y-2=0,\ 2x+y-3=0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)-1$ 접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$2m^2+3m-2=0$

$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ -2$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2},\ \ y=-2x+5$ 이므로

접선의 방정식은 $x-2y-5=0$ or $2x+y-5=0$

42. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 인 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(11,\ 12)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px+qy=100$ 일 때, $p+q$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

원 위의 두 접점을 $\mathrm{Q}_1(a_1, b_1)$, $\mathrm{Q}_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x+b_1y=100,\ a_2x+b_2y=100$ 이고
두 직선은 동시에 $\mathrm{P}(11,\ 12)$ 를 지나므로
$11a_1+12b_1=100,\ 11a_2+12b_2=100$ 이 함께 성립한다.
이것은 $11x+12y=100$ 위에 두 점 $\mathrm{Q}_1(a_1, b_1)$,
$\mathrm{Q}_2(a_2, b_2)$ 가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ 의 방정식은
$11x+12y=100$ 이다.
따라서 $p=11,\ q=12 \quad \therefore\ p+q=23$

43. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ 에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R 이라고 하자. 직선 QR 의 방정식을 $ax + by = 1$ 라 할 때 $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

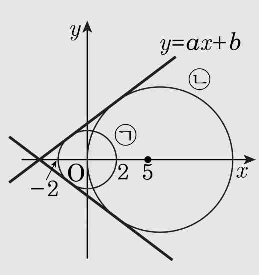
접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ 라고 하면
Q, R 에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x + y_1y = 1$, $x_2x + y_2y = 1$ 이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ 를 지나므로
$3x_1 + 4y_1 = 1$, $3x_2 + 4y_2 = 1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 는
방정식 $3x + 4y = 1$ 의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR 의 방정식은 $3x + 4y = 1$ 이다.
$\therefore\ a = 3,\ b = 4 \quad \therefore\ a + b = 7$

44. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2+y^2=4$, $(x-5)^2+y^2=25$

① $y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y=\pm\frac{4}{5}x\pm2$ (복부호 동순)
③ $y=\pm\frac{5}{6}x\pm\frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y=\pm\frac{9}{10}x\pm\frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y=\pm\frac{10}{11}x\pm\frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-5)^2+y^2=25 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을 $y = ax+b \cdots\cdots$ ㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 이 접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$

$\therefore |b|=2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 과 접하므로

$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$

$\therefore |5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b\neq0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$\frac{|5a+b|}{|b|}=\frac{5}{2}$

$2|5a+b|=5|b|, 2(5a+b)=\pm5b$

$\therefore b=-\frac{10}{7}a$ 또는 $b=\frac{10}{3}a$

(i) $b=-\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2+49=0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b=\frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2=9, a^2=\frac{9}{16}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{4}, b=\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

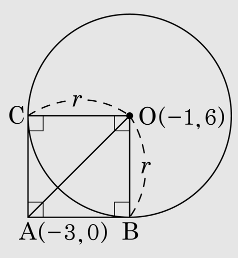
(i), (ii) 로부터 구하는 공통접선의 방정식은
$y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

45. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이
O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가
$r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$

$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$

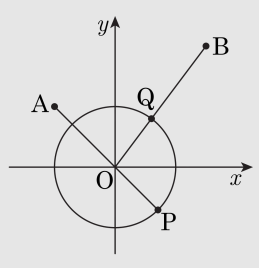
$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

46. 두 점 A$(-2,\ 2)$, B$(3,\ 4)$ 가 있다. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 임의의 두 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값과 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 의 최솟값의 합은 ?

① 3　　② $2+2\sqrt{2}$　　③ $5+2\sqrt{2}$

④ $4+2\sqrt{2}$　　⑤ 7

해설



그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}$ 는 최대가되고 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AP}}$ = 반지름의 길이+ 원의 중심과 A 까지의 거리

$= 2+\sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2} = 2+2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BQ}}$ = 원의 중심과 B 까지의 거리− 반지름의 길이

$= \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}-2$

$= 5-2=3$

$\therefore$ 구하는 답은 $(2+2\sqrt{2})+3=5+2\sqrt{2}$

47. 점 P(a, b) 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(a, 0)$, $\mathrm{O}(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로
$a > 0$, $b > 0$ 이라 하면
$\triangle$POQ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$
P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$
산술기하조건을 이용하면,
$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$
$ab \leq \frac{1}{2}$
$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$

48. 두 점 A$(-8,\ -2)$, B$(2,\ 8)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABC 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$　　② $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

③ $(x+2)^2+(y+1)^2=2$　　④ $(x+2)^2+(y-2)^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

해설

P$(a,\ b)$ $a^2+b^2=27$

무게중심 G$(x, y)=\left(\dfrac{-8+2+a}{3},\ \dfrac{-2+8+b}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{a-6}{3},\ \dfrac{b+6}{3}\right)$

$X=\dfrac{a-6}{3},\ Y=\dfrac{b+6}{3}$

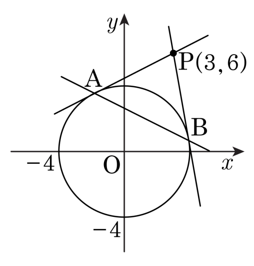
$a=3X+6,\ b=3Y-6$ $a^2+b^2=27$ 에 대입하면,

$(3X+6)^2+(3Y-6)^2=27$

$\therefore\ (X+2)^2+(Y-2)^2=3$

따라서 G$(X,\ Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2+(y-2)^2=3$

49. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?

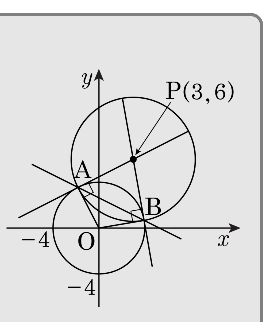


① $3x+6y-16=0$　② $3x-6y+16=0$

③ $3x+6y-14=0$　④ $3x-6y+14=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설



다음 그림에서 $\overline{PO}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle$PAO 가 직각삼각형이므로,

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{29}$

이 때, 점 P 를 중심으로 하고,

선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 이므로,

선분 AB 는 원 $x^2+y^2=16$ 과

새로운 원 $(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 의 공통현이다.

따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-\{(x-3)^2+(y-6)^2-29\}=0$

$x^2+y^2-16-x^2+6x-9-y^2+12y-36+29=0$

$6x+12y-32=0$

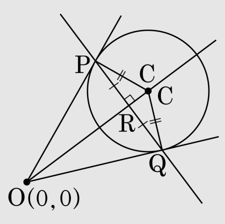
$\therefore\ 3x+6y-16=0$

50. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

① $4x+3y=25$　　② $4x+3y=21$　　③ $3x+4y=16$

④ $3x+4y=25$　　⑤ $3x+4y=21$

해설

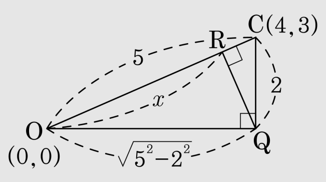


구하고자 하는 직선
$y=ax+b$ 는 원점과
원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서
수직이므로,

$a\times\frac{3}{4}=-1$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+b,\ 4x+3y-3b=0$



직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R
이라 하면
△OCQ 와 △OQR 은 서로 닮음이
므로,

$5\ :\ \sqrt{21}=\sqrt{21}\ :\ x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{21}{5}$

$|3b|=21,\ b>0$ 이므로 $3b=21$

$\therefore\ 4x+3y=21$