1. 다음 중 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단,a,b 는 실수)

① 항상 x 축과 만난다.

② 항상 x 축과 만나지 않는다.

③ a,b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.

④ a,b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.

⑤ a,b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프와
x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$$

$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$ 이므로 임의의 실수 a,b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

2. 두 곡선 $y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - 5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면

$y' = 2x$이므로 $y'_{x=t} = 2t$는 접선의 기울기이다.

따라서 접선의 방정식은

$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠

㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$에도 접하므로

$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서

$x^2 + 2(t-1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡

㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4} = 0$이므로

$(t-1)^2 - (5 - t^2) = 0$에서

$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore\ t = -1,\ 2$

㉠에서

$t = -1$일 때, $y = -2x - 1$

$t = 2$일 때, $y = 4x - 4$

따라서 두 y절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

3. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$

$(a - b)p + a - b = 0$

$(a - b)(p + 1) = 0$

$a \neq b$ 이므로 $p = -1$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$\therefore 1 + a + b = 0$

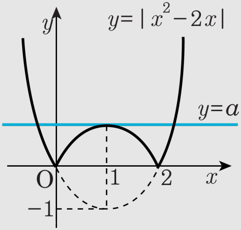
$\therefore a + b = -1$

4. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$　② 0　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.
$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
$\therefore\ a = 1$

5. 이차함수 $y=-x^2+10x-13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+10x-13=-(x-5)^2+12$

최댓값 $m=12$

$y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$

최솟값 $n=\frac{1}{2}$

$\therefore mn=12\times\frac{1}{2}=6$

6. 이차함수 $y=-3x^2+6x+4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2+6x+4a \\ &= -3(x-1)^2+3+4a \end{aligned}$$

$y=-3(x-1)^2+3+4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로

$2a-7=-3(-a-1)^2+3+4a$ 을 정리하면 $3a^2+4a-7=0$,

$(3a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{7}{3}\ or\ 1$

그런데 최댓값 $3+4a$ 의 값이 음수이므로 $a=-\dfrac{7}{3}$ 이다.

7. 이차함수 $y=-x^2-2x+7(-3\le x\le 1)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=-x^2-2x+7=-(x+1)^2+8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1,8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x=-3$일 때 $y=-(-3+1)^2+8=4$
$x=1$일 때 $y=-(1+1)^2+8=4$이다.
따라서 최댓값 $a=8$이고, 최솟값 $b=4$이므로 $a+b=12$

8. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + 2kx + 4k \\
&= (x^2 + 2kx) + 4k \\
&= (x+k)^2 - k^2 + 4k
\end{aligned}
$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k-2)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값 4이다.

9. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

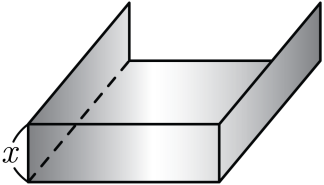
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

10. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

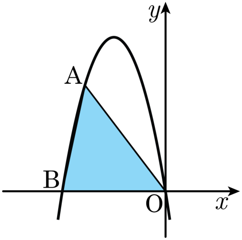
해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(60-2x) \\ &= -2x^2+60x \\ &= -2(x^2-30x+225-225) \\ &= -2(x-15)^2+450 \end{aligned}$$

$x=15$ 일 때, 최대 넓이 450

11. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36

④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0 = c,\ \ 0 = -36 - 6b$
$b = -6,\ \ c = 0$
$y = -x^2 - 6x = -(x+3)^2 + 9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로

$\triangle$OAB 의 넓이$= \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OB}} \times 9 = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

12. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

13. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 2 초

▷ 정답 : 20 m

해설

$h = 20t - 5t^2 = -5(t-2)^2 + 20$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.