

1. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, a, b 는 실수)
- ① 항상 x 축과 만난다.
 - ② 항상 x 축과 만나지 않는다.
 - ③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.
 - ④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.
 - ⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

2. 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y 절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 (t, t^2) 으로 놓으면
 $y' = 2x$ 이므로 $y'_{x=t} = 2t$ 는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
 $y - t^2 = 2t(x - t) \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에도 접하므로
 $2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
 $x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 이므로
 $(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$ 에서
 $(t + 1)(t - 2) = 0 \quad \therefore t = -1, 2$
 $\textcircled{1}$ 에서
 $t = -1$ 일 때, $y = -2x - 1$
 $t = 2$ 일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y 절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

3. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

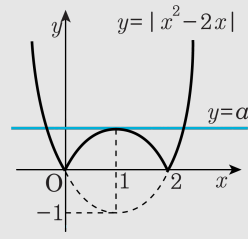
$$\therefore a + b = -1$$

4. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$ 와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의

꼭지점을 지나야 한다.

$y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$ 에서

꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$

$\therefore a = 1$

5. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x - 5)^2 + 12$$

$$\text{최댓값 } m = 12$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{최솟값 } n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

6. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 4a \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 4a \end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
 $2a-7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a+7)(a-1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

7. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7$ ($-3 \leq x \leq 1$)의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 4

② 7

③ 8

④ 11

⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x + 1)^2 + 8$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
 $x = -3$ 일 때 $y = -(-3 + 1)^2 + 8 = 4$
 $x = 1$ 일 때 $y = -(1 + 1)^2 + 8 = 4$ 이다.
따라서 최댓값 $a = 8$ 이고, 최솟값 $b = 4$ 이므로 $a + b = 12$

8. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2kx + 4k \\ &= (x^2 + 2kx) + 4k \\ &= (x + k)^2 - k^2 + 4k \end{aligned}$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k - 2)^2 + 4$
따라서 m 의 최댓값 4이다.

9. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

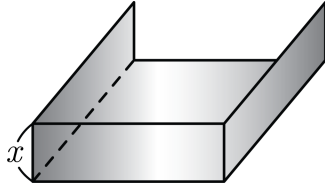
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

10. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.

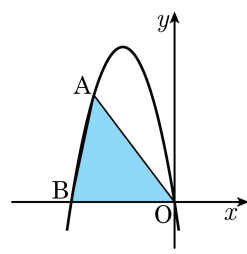


- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면
 $y = x(60 - 2x)$
 $= -2x^2 + 60x$
 $= -2(x^2 - 30x + 225 - 225)$
 $= -2(x - 15)^2 + 450$
 $x = 15$ 일 때, 최대 넓이 450

11. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



- ① 18 ② 27 ③ 36
④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라

고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의

넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{ 의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

12. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a , 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.

따라서 $ab = 64$ 이다.

13. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답:

▶ 정답 : 2초

▶ 정답 : 20m

해설

$$h = 20t - 5t^2 = -5(t - 2)^2 + 20$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.