1. 집합 $A=\left\{x \mid x\text{는 } 20\text{의 약수}\right\}$, $B=\{a,\ \{b\},\ \{c,\ \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A)-n(B)$를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

$A=\left\{x \mid x\text{는 } 20\text{의 약수}\right\}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$ 이므로 $n(A)=6$ 이고,
$B=\{a,\ \{b\},\{c,\ \varnothing\}\}$ 의 원소는 3 개이므로
$n(A)-n(B)=3$ 이다.

2. 다음 보기의 네 가지 조건으로 확실히 말할 수 없는 것은?

보기

- 모든 A 의 원소는 B 의 원소이다.
- 모든 C 의 원소는 B 의 원소이다.
- 모든 E 의 원소는 B 의 원소이다.
- 모든 B 의 원소는 D 의 원소이다.

① 모든 A 의 원소는 D 의 원소이다.

② 모든 C 의 원소는 E 의 원소이다.

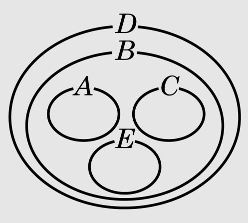
③ 모든 E 의 원소는 D 의 원소이다.

④ A 와 C 의 관계는 알 수 없다.

⑤ D 의 원소 중 C 의 원소가 아닌 것이 있다.

해설

- 모든 A 의 원소는 B 의 원소이다. $A \subset B$
- 모든 C 의 원소는 B 의 원소이다. $C \subset B$
- 모든 E 의 원소는 B 의 원소이다. $E \subset B$
- 모든 B 의 원소는 D 의 원소이다. $B \subset D$



A, C, E 사이의 포함관계는 알수 없다.
① $A \subset B$ 이고 $B \subset D$ $\therefore A \subset D$
② C 와 E 의 포함관계는 알 수 없다.
③ $E \subset B$ 이고 $B \subset D$ 이므로 $E \subset D$ 이다.
④ A, C, E 사이의 포함관계는 알 수 없다.
⑤ D 의 원소 중 C 에 포함되지 않는 원소가 있기 때문에 C 의 원소가 아닌 것도 있다.

3. 두 집합 $A = \{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\}$, $B = \{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$ 이 서로 같을 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = B$ 이므로
$\{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\} = \{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$
이 중 3 은 공통이므로 제외하면
$a = 5$, $b = 7$ 또는 $a = 7$, $b = 5$
따라서 $a + b = 12$
$c = 2$, $d = 6$ 또는 $c = 6$, $d = 2$
따라서 $c + d = 8$
$\therefore a + b + c + d = 20$

4. 집합 $A = \{x \mid x$는 20 미만의 3의 배수$\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 16 ② 32 ③ 56 ④ 64 ⑤ 128

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$
전체 부분집합의 개수 : $2^6 = 64$ (개)
홀수를 적어도 1 개 포함하는 집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 홀수가 하나도 포함되지 않은 부분집합의 개수를 빼면 된다.
$2^6 - 2^3 = 64 - 8 = 56$ (개)

5. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2^{(1\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$

6. $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{3,\ 5,\ 9\}$ 일 때, $A\cap B$ 를 포함하는 U 의 부분집합의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
$A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{3,\ 5,\ 9\}$ 이므로 $A\cap B=\{3,\ 5\}$ 이다.
3, 5 를 포함하는 U 의 부분집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$ (개)

7. 중앙 고등학교 3 학년 어떤 반에서 영어를 좋아하는 학생이 24 명, 수학을 좋아하는 학생 16 명, 영어 또는 수학을 좋아하는 학생이 30 명이다. 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 10 명

해설

영어를 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 수학을 좋아하는 학생을 B 라고 하자.
그렇다면 영어 또는 수학을 좋아하는 학생은 $A \cup B$ 가 된다.
영어와 수학을 모두 좋아하는 학생, 즉 $A \cap B$ 를 구하는 것이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$30 = 24 + 16 - x$
그러므로 x는 10이다.

8. 명제 ‘$x > 1$ 인 어떤 x 에 대하여 $x^2 < 1$ 또는 $x^2 = 1$ ’의 부정은?

① $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

② $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

③ $x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

④ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

⑤ $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

해설

$x > 1$은 대전제이므로 부정이 적용되지 않는다.
$\sim$ (어떤x) $\leftrightarrow$ (모든 x), $\sim$ (또는) $\leftrightarrow$ (그리고),
$\sim (x^2 < 1) \leftrightarrow (x^2 \ge 1)$, $\sim (x^2 = 1) \leftrightarrow (x^2 \ne 1)$
따라서 주어진 명제의 부정은 ‘$x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ ’이다.

9. $p(x) : x > 0,\ q(x) : x < 1$ 일 때, ‘$p(x)$ 이고 $q(x)$ ’ 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$
② $\{x \mid 0 < x < 1\}$
③ $\{x \mid x > 1\}$
④ $\left\{x \mid x < 0 \text{ 또는 } x > 1\right\}$
⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x) : x > 0,\ q(x) : x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.
즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

10. 다음 다섯 개의 명제 중 참인 명제의 개수는? (단, a, b, c는 실수)

㉠ $|a| + |b| = 0 \leftrightarrow ab = 0$

㉡ $a < b$ 이면 $ac < bc$ 이다.

㉢ $a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.

㉣ $a + b\sqrt{3} = 0$ 이면 $a = 0$ 그리고 $b = 0$

㉤ $a < b$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

① 없다.　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

㉠ $|a| + |b| = 0 \leftrightarrow a = b = 0 \not\leftrightarrow ab = 0$
㉡ $c \leq 0$ 인 경우 성립하지 않는다.
㉢ 반례 : $a = -1, b = 0$
㉣ 반례 : $a = \sqrt{3}, b = -1$ (a, b 가 유리수일 때 명제가 성립한다.)
㉤ 반례 : $a = -1, b = 1$ (a, b 가 같은 부호일 때 성립한다.)

11. 우리 학교에서 다음 두 명제는 참이다.

㉠ 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석한다.
㉡ 우리학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않는다.

이 때, 다음 명제 중 참인 것은?

① 어떤 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

② 우리학교 학생들은 모두 동아리 회원이다.

③ 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

④ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이 아니다.

⑤ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이다

해설

①, ②, ③은 직관적으로 판단해도 거짓이다. 우리 학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않았고, 모든 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석하였다고 하였으므로 우리학교 학생 중에는 동아리 회원이 아닌 학생이 있음을 알 수 있다. 따라서 ④는 참이다. 한편 동아리 회원이 한 명도 없는 경우도 주어진 두 조건 ㉠, ㉡를 만족하므로 ⑤번은 거짓이 된다.
∴ 답 ④

12. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

13. 다음에서 조건 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p: x=0$이고 $y=0$, $q: xy=0$

② $p: x^2=9$, $q: x=3$

③ $p: x, y$는 모두 짝수, $q: x+y$는 짝수

④ $p: x \neq 0$이고 $y \neq 0$, $q: xy \neq 0$

⑤ $p: x$는 유리수, $q: x^2$ 은 유리수

해설

① $q \rightarrow p$: 거짓 $(x=0,\ y=1)$
② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2=9$ 이면 $x=\pm 3$)
③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x=1,\ y=3$ 이면 $x+y=4$)
④ 필요충분조건
⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x=\sqrt{2}$ 이면 $x^2=2$)

14. 다음은 실수 $a,\ b,\ c$ 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \geq 0
\end{aligned}$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$
$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

15. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)

16. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다. 원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다. 원소는 10 미만의 자연수이다.

① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\}$　　② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\}$　　④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

17. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 5, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{6, 9, 12\}$ 가 성립할 때 다음 중 집합 B 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{6, 8, 9, 12\}$ ② $\{6, 8, 9, 10, 12\}$

③ $\{5, 6, 8, 12\}$ ④ $\{1, 5, 6, 9\}$

⑤ $\{6, 9, 12\}$

해설

$\{6, 9, 12\} \subset B \subset \{3, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 이므로 집합 B 는 원소 6, 9, 12 은 반드시 포함하는 집합이다.
따라서 ③, ④ 은 B 가 될 수 없다.

18. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$	㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$	㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$
㉣ $0 \subset \{0\}$	㉤ $0 \in \varnothing$	㉥ $0 \notin \varnothing$
㉦ $A \subset (A \cup B)$	㉧ $n(\varnothing) = 1$	㉨ $A \in (A \cap B)$

① ㉡,㉥,㉦　　② ㉡,㉤,㉧　　③ ㉠,㉡,㉥
④ ㉢,㉤,㉨　　⑤ ㉤,㉧,㉨

해설

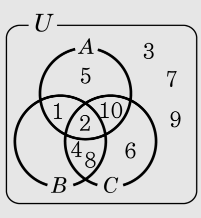
㉠ $n\{(0)\} = 1$
㉢ $4 \notin \{1, 2\}$
㉣ $0 \in \{0\}$
㉤ $0 \notin \varnothing$
㉧ $n(\varnothing) = 0$
㉨ $A \subset (A \cup B)$

19. $U=\{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 $A=\{x \mid x\text{는 } 10\text{의 약수}\}$, $B=\{x \mid x\text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $C=\{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$ 일 때, $(A-B)^c$ 의 원소의 합은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
벤 다이어그램으로 나타내면



가 되어

$(A-B)^c=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 이다. 따라서 원소의 합은 40 이다.

20. 임의의 집합 X에 대하여 집합 A, B가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$를 만족할 때, 다음 중 집합 A, B의 관계로 옳은 것은?

① $A = B$　　② $A \subset B^c$　　③ $A \cup B = U$

④ $A = \varnothing$　　⑤ $A \cap B = \varnothing$

해설

집합 X가 임의의 집합이므로 $X = \varnothing$일 때와 $X = U$(U는 전체 집합)일 때를 생각해 본다.

i) $X = \varnothing$일 때, $A \cap (B \cup \varnothing) = A \cap B$,

$A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$이므로 $A \cap B = A$

$\therefore\ A \subset B$

ii) $X = U$일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$,

$A \cup (B \cap U) = A \cup B$이므로 $A = A \cup B$

$\therefore\ B \subset A$

i), ii) 에서 $A = B$

또, 역으로 $A = B$이면 주어진 식을 만족한다.

21. 전체집합 $U = \left\{x | x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $B = \{1, 3, 5, 9\}$, A 에 대하여 집합
$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1, 3, 9, 10\}$ 를 만족하는 집합 A 는?

① $\{2, 5\}$ ② $\{5, 7\}$ ③ $\{5, 10\}$

④ $\{5, 7, 9\}$ ⑤ $\{5, 9, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 9, 10\}$ 이므로 $A \cap B = \{5\}$ 이다.
따라서 집합 $A = \{5, 10\}$ 이다.

22. 두 집합 $A=\{x|x$는 7미만의 자연수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$에 대하여 $(B-A)\cup X=X$, $(A\cup B)\cap X=X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$
$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$,
$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$,
$\{7,\ 8\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$,
따라서, 집합 X는 $A\cup B$의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{8-2}=2^6=64$(개)이다.

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 34$, $n(A^c \cap B^c) = 11$, $n(B - (A \cap B)^c) = 6$ 일 때, $n((A \cup B) - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

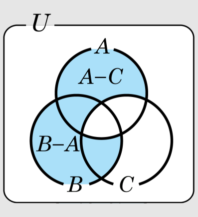
$n(U) = 34$ 이고 $n(A^c \cap B^c) = 11$ 이면, $n(A \cup B) = 23$,
$B - (A \cap B)^c = A \cap B$ 이므로 $n(B - (A \cap B)^c) = n(A \cap B) = 6$,
$\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 23 - 6 = 17$

24. 전체집합 $U = \{x \mid x \leq 100\text{인 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 5\text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n((A^c \cap B) \cup (A - C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설



$A^c \cap B = B - A$ 이므로
$(B - A) \cap (A - C) = \varnothing$
$\therefore n((A^c \cap B) \cup (A - C)) = n(A^c \cap B) + n(A - C)$
$n(A^c \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$
$= 20 - 5 = 15$
$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 25 - 8 = 17$
$\therefore 15 + 17 = 32$

25. 집합 P 의 모든 원소의 합을 $s(P)$, 집합 P 의 부분집합을 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_N$ 으로 정의한다. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a+2 | a \in A\}$ 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A, B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

- $A \cap B = \varnothing$
- $s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 128$

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

집합 B 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{a_1+2, a_2+2, a_3+2, a_4+2\}$,
집합 B 의 모든 부분집합의 원소의 합에서 각 원소는 2^{4-1} 번 나오므로
$s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 2^{4-1} \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 128 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$,
또, $A \cap B = \varnothing$ 이므로 집합 A, B 의 모든 원소의 합은
$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 24$