

1. 다음 중에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 높은 산들의 모임

② 작은 사람들의 모임

③ 몸무게가 60 kg 이하인 우리 학교 남학생의 모임

④ 우리나라에서 인구수가 가장 적은 도시의 모임

⑤ 우리 반 남학생 모임

해설

① ‘높은’이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

② ‘작은’이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

③ ‘60 kg 이하’라는 명확한 기준이 있으므로 집합이다.

④ ‘가장’이라는 단어가 명확한 기준을 제시하므로 집합이다.

⑤ ‘우리 반 남학생’은 기준이 명확하므로 집합이다.

2. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, 다음 중 A 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\{1, 2, 3\}$

② $\{0\}$

③ ϕ

④ $\{0, 1, 2, 3\}$

⑤ $\{2, 3, 4\}$

해설

⑤ $4 \notin A$

3. 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 7개

② 8개

③ 12개

④ 16개

⑤ 32개

해설

집합 A 의 원소의 개수가 4개이므로 부분집합의 개수는 $2^4 = 16(\text{개})$

4. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $U \neq \emptyset$)

① $P^c \subset Q$

② $P \cap Q = \emptyset$

③ $P^c \cap Q^c = \emptyset$

④ $P \cap Q^c = Q^c$

⑤ $P \cup Q = U$

해설

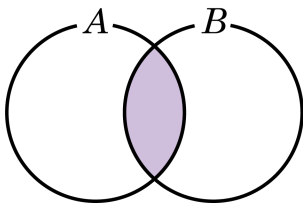
$\sim p \rightarrow q$ 를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함 관계를 본다.

$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \emptyset$ 이어야 한다.

$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \emptyset$

$P \cap Q = \emptyset$ 는 알 수 없다.

5. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음의 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 45

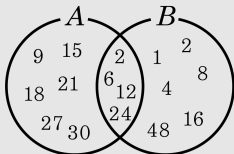
해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ 이다.

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{3, 6, 12, 24\}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 원소의 합은

$3 + 6 + 12 + 24 = 45$ 이다.

6. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3, a+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $A = \{1, 2, 3\} \therefore a = 3$

$B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 원소의 합은 10 이다.

7. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,

$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로

$X \subset A \cap B = \{3, 4\}$

집합 X 는 $\{3, 4\}$ 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

8. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ 이고 A, B 가 보기를 만족할 때, 집합 A 의 부분집합이 아닌 것은?

보기

$$\neg. A \cap B = \{3, 5\}$$

$$\neg. B - A = \{1\}$$

$$\neg. (A \cup B)^c = \{4\}$$

① $\{2\}$

② $\{3\}$

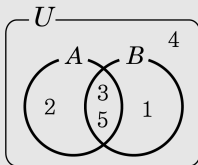
③ $\{2, 3\}$

④ $\{2, 5\}$

⑤ $\{1, 2, 5\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{2, 3, 5\}$ 이다. 따라서 A 의 부분집합인 것은 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}$ 이다.



9. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 7$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 7 + 6 - 2 = 11\end{aligned}$$

10. 명제 ‘이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.’의 대우는?

- ① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.
- ② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.
- ③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.
- ④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.
- ⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

11. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

12. 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\emptyset \in A$

㉡ $\{\emptyset\} \subset A$

㉢ $\{1, 2\} \subset A$

㉣ $\{1, 2\} \in A$

㉤ $\{\{1, 2\}\} \subset A$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠ : $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이다.

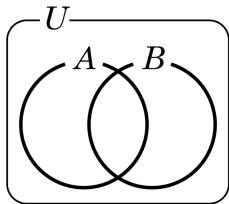
㉡ : $\emptyset$ 이 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset A$

㉢ : $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

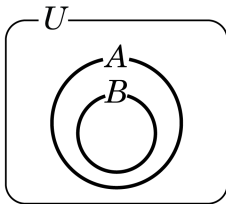
㉣ : $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이다.

㉤ : $\{\{1, 2\}\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

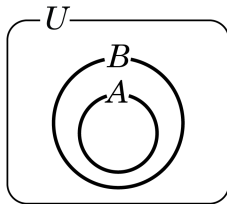
13. 다음 벤 다이어그램 중 $B^c \subset A^c$ 인 관계를 만족하는 것을 골라라.



㉠



㉡



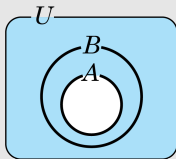
㉢

▶ 답:

▷ 정답: ㉢

해설

$A \subset B$ 일 때, 벤 다이어그램을 그리면 $B^c \subset A^c$ 이다.



14. 두 집합 $A = \{1, 4, a^2 + 2a\}$, $B = \{a + 2, a^2, 2a - 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, $B - A$ 를 구하면 ?

① $\{-1\}$

② $\{2\}$

③ $\{-1, 2\}$

④ $\{9\}$

⑤ $\{-2, 2, 9\}$

해설

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로

$$a^2 + 2a = 3, a^2 + 2a - 3 = 0, a = -3 \text{ or } 1$$

(i) $a = -3$ 일 때 $B = \{-9, -1, 9\}$ 로 성립하지 않는다.

(ii) $a = 1$ 일 때 $B = \{-1, 1, 3\}$

$$\therefore B - A = \{-1\}$$

15. 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 5 \geq k$ 이다.’ 는 참이고 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 2$ 이다.’ 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-5 \leq k < -2$

② $-5 < k \leq -2$

③ $-2 \leq k < 2$

④ $2 < k \leq 5$

⑤ $2 \leq k < 5$

해설

부등식 $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore k \leq 5 \cdots \textcircled{㉠}$

명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 2$ 이다.’ 가 거짓이므로 그 부정인 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + k > 2$ 이다.’ 는 참이다. 따라서, $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore k > 2 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 으로부터 구하는 k 의 값의 범위는 $2 < k \leq 5$

16. a, b 가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a| + |b| \geq |a + b|$

㉡ $|a + b| \geq |a - b|$

㉢ $|a - b| \geq |a| - |b|$

㉣ $|a + b| \geq |a| - |b|$

① ㉠

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a| - |b|^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

17. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$$a \in A \text{ 이면 } \frac{a}{a-1} \in A \text{ (단, } a \neq 1 \text{)}$$

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$$

$$-1 \in A \text{ 이면 } \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$$

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \dots$$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수는?

$$B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4$$

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 10개

⑤ 12개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4 \text{ 이므로}$$

$$B = \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 9\}, \{1, 2, 3, 18\}, \\ \{2, 3, 6, 9\}, \{2, 3, 6, 18\}, \{2, 3, 9, 18\}$$

19. 학생 수가 40 명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A , B 를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30 명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 50 - n(A \cap B)\end{aligned}$$

$$n(A \cap B) = 50 - n(A \cup B) \cdots \text{㉠}$$

i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 치약 A 를 사용한 학생이 모두 치약 B 를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M = 20$

ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 ㉠에서 $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우이다.

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 40, n(A \cap B) = 10 = m$$

$$\therefore m + M = 10 + 20 = 30$$

20. 제공의 합이 일정한 두 실수 a , b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$