1. $\sqrt{\dfrac{756}{x}}$ 가 자연수가 되기 위한 x 의 값 중 가장 작은 수는?

① 3 ② 6 ③ 7 ④ 21 ⑤ 42

해설

$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ 이므로 $\sqrt{\dfrac{2^2 \times 3^3 \times 7}{x}}$ 이 자연수가 되기 위한 자연수 중 가장 작은 값 $x = 3 \times 7 = 21$ 이다.

2. 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $a > 0$ 일 때, a 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$ 이다.

㉡ 5 의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$ 이다.

㉢ -9 의 제곱근은 -3 이다.

㉣ 0 의 제곱근은 0 이다.

㉤ 음수의 제곱근은 1 개이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉢ -9 의 제곱근은 존재하지 않는다.
㉤ 음수의 제곱근은 없다.

3. 다음 수를 큰 수부터 순서대로 나열할 때, 세 번째에 오는 수를 구하여라.

$$\frac{1}{3},\quad \sqrt{\frac{1}{3}},\quad -\sqrt{12},\quad -2,\quad \sqrt{0.6}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{3}$

해설

$\sqrt{0.6}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{3}$, -2, $-\sqrt{12}$ 의 순서이므로 세 번째에 오는 수는 $\frac{1}{3}$ 이다.

4. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

① $4 > \sqrt{15}+1$ ② $3+\sqrt{5} > \sqrt{5}+\sqrt{8}$

③ $\sqrt{2}+1 > 3$ ④ $3-\sqrt{2} > 4-\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{\frac{4}{5}} > \sqrt{\frac{6}{7}}$

해설

① $4 > \sqrt{15}+1$ 에서
$4-\sqrt{15}-1 = 3-\sqrt{15} < 0,$
$\therefore\ 4 < \sqrt{15}+1$

② $3+\sqrt{5} > \sqrt{5}+\sqrt{8}$ 에서
$3+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{8} = 3-\sqrt{8} > 0,$
$\therefore\ 3+\sqrt{5} > \sqrt{5}+\sqrt{8}$

③ $\sqrt{2}+1 > 3$ 에서
$\sqrt{2}+1-3 = \sqrt{2}-2 < 0,\ \therefore\ \sqrt{2}+1 < 3$

④ $3-\sqrt{2} > 4-\sqrt{2}$ 에서
$3-\sqrt{2}-4+\sqrt{2} = -1 < 0,$
$\therefore\ 3-\sqrt{2} < 4-\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{\frac{4}{5}} > \sqrt{\frac{6}{7}}$ 에서

$$\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{20}}{5}-\frac{\sqrt{42}}{7} = \frac{7\sqrt{20}}{35}-\frac{5\sqrt{42}}{35} = \frac{\sqrt{980}-\sqrt{1050}}{35} < 0$$

$\therefore\ \sqrt{\frac{4}{5}} < \sqrt{\frac{6}{7}}$

5. $2x^4-2,\ x^3-x^2-4x+4$ 의 공통인 인수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-1$

해설

$$\begin{aligned}2x^4-2 &= 2\left(x^4-1\right)\\&= 2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\\&= 2\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3-x^2-4x+4 &= x^2\left(x-1\right)-4\left(x-1\right)\\&= \left(x-1\right)\left(x^2-4\right)\\&= \left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)\end{aligned}$$

6. $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $\dfrac{2a}{b} - \dfrac{2b}{a}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4\sqrt{3}$

해설

$ab = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2$

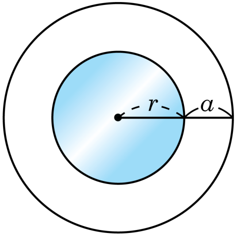
$a + b = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3}$

$a - b = (\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1) = -2$

$$\therefore\ \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} = \frac{2a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{2(a + b)(a - b)}{ab}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{3})(-2)}{2} = -4\sqrt{3}$$

7. 다음 그림과 같이 반지름이 r m 인 원형의 연못 둘레에 폭이 a m 인 도로를 만들려고 한다. 이 도로의 넓이를 S 라 할 때, S 를 a 와 r 을 사용한 식으로 나타낸 것은?



① $S = (r - a)\pi$

② $S = (a^2 + r)\pi$

③ $S = a(r + 3a)\pi$

④ $S = a(a + 2r)\pi$

⑤ $S = (a + r)(a - r)\pi$

해설

$$\begin{aligned} S &= (a+r)^2\pi - r^2\pi \\ &= \pi\{(a+r)^2 - r^2\} \\ &= \pi(a+r+r)(a+r-r) \\ &= a\pi(2r+a) \end{aligned}$$

8. n 개의 수 중 2 개의 수를 골라 만들 수 있는 두 자리의 자연수는 42 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

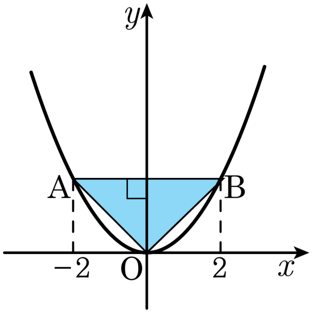
$n(n-1)=42$

$n^2-n-42=0$

$(n+6)(n-7)=0$

$n=7(\because n>0)$

9. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle$AOB 의 넓이는 얼마인가?



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

10. 반지름의 길이의 비가 1 : 3 인 두 원이 있다. 이 두 원의 넓이의 합이 $40\pi\text{cm}^2$ 일 때, 작은 원의 반지름의 길이는 몇 cm 인가?

① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

작은 원의 반지름을 r 라고 하면, 큰 원의 반지름은 $3r$ 이다.

(두 원의 넓이의 합)$= \pi r^2 + \pi(3r)^2 = 10\pi r^2 = 40\pi\,\text{cm}^2$

$r^2 = 4$

$\therefore\ r = 2\,\text{cm}\ (\because r > 0)$

11. 다음 중 $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 의 분모를 유리화한 것은?

① $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　③ $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

④ $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

해설

$\sqrt{2}-\sqrt{3}=A$ 라 하면

$$\frac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-A}{1+A}=\frac{(1-A)^2}{(1+A)(1-A)}=\frac{A^2-2A+1}{1-A^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}-\sqrt{3})+1}{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{(2-2\sqrt{6}+3)-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+1}{1-(2-2\sqrt{6}+3)}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-4}$$

$$=\frac{(6-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{6}+4)}{(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+4)}$$

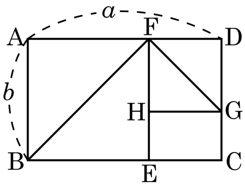
$$=\frac{12\sqrt{6}+24-24-8\sqrt{6}-4\sqrt{12}-8\sqrt{2}}{24-16}$$

$$+\frac{4\sqrt{18}+8\sqrt{3}}{24-16}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

12. 다음 그림에서 □ABEF 와 □FHGD 가 정사각형일 때, 사각형 HECG 의 넓이를 a, b 에 관한 식으로 나타낸 후 인수분해하면 $(a-b)(ta+sb)$ 이다. $t+s$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : $t+s=1$

해설

사각형 ABFE, EGHD 는 정사각형이므로
$\overline{\mathrm{HE}}=b-(a-b)=2b-a, \overline{\mathrm{EC}}=a-b$
남은 사각형의 넓이는 $(2b-a)(a-b)$ 이다.
따라서 $t=-1,\ s=2$ 이므로 $t+s=1$ 이다.

13. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x-14\right)(2y+8)=0$을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x=6,\ y=-4$	㉡ $x=6,\ y=4$
㉢ $x=-6,\ y=-4$	㉣ $x=-6,\ y=4$
㉤ $x=4,\ y=6$	㉥ $x=-4,\ y=6$

① 한 개도 없다.
② 2 개
③ 3 개
④ 5 개
⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x-14=0$ 또는 $2y+8=0$ 이므로
$x=6$ 또는 $y=-4$ 인 것을 찾으면
$x=6$ 인 것은 ㉠, ㉡
$y=-4$ 인 것은 ㉠, ㉢
따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3 개이다.

14. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $k=-6$ 이면 근이 2 개이다.

② $k=-1$ 이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k=0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k=2$ 이면 근이 1 개이다.

⑤ $k=4$ 이면 근이 없다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

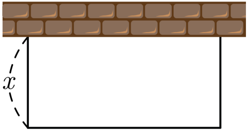
15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$
$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$$
$$\therefore a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) + 1 = -\frac{3}{2}$$

16. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m　　② 4 m　　③ 5 m

④ 6 m　　⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) \\ &= -2x^2+20x \\ &= -2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

$x=5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

17. $\dfrac{6^{10}}{12^5} = \sqrt{9^a}$, $\sqrt{\dfrac{8^{10}}{8^4}} = 2^b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=14$

해설

$$\frac{6^{10}}{12^5} = \frac{2^{10}\times 3^{10}}{2^5\times 2^5\times 3^5} = 3^5 = \sqrt{(3^2)^5} = \sqrt{9^5}$$

$$\sqrt{\frac{8^{10}}{8^4}} = \sqrt{8^6} = \sqrt{(8^3)^2} = 8^3 = 2^9$$

$a=5$, $b=9$ 이므로 $a+b=5+9=14$

18. $\sqrt{24a}$ 의 값이 자연수가 되는 두 자리 자연수 a 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$\sqrt{24a}$ 가 자연수가 되기 위해서 $24a$ 는 완전제곱수가 되어야 한다.
$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 가장 작은 자연수 a 의 값은 6 이다.
따라서 두자리 수는 6×2^2 , 6×3^2 , 6×4^2 뿐이다.
$\therefore$ 3 개다.

19. $\left(1-\dfrac{1}{6^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{7^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{8^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{14^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{15^2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\dfrac{8}{9}$

해설

$1-\dfrac{1}{a^2}=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{14}{15}\times\frac{16}{15}\\ &= \frac{5}{6}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

20. 지난달 정가로 판매한 어떤 물건이 정가의 $x\%$ 의 만큼 이익이 발생했다. 이번 달에는 동일한 물건을 원가에 $x\%$ 의 이익을 붙여서 판매하였다. 지난달 정가가 이번달 정가보다 지난달 정가의 $\frac{1}{25}$ 만큼 높다고 할 때, x 의 값을 구하여라. (단, 지난달과 이번달의 원가는 변함이 없다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

지나달 정가를 P_1, 이번달 정가를 P_2 로 놓고 원가를 A 로 놓으면 지난달에 정가(P_1)의 $x\%$ 만큼 이익이 발생하였으므로 원가 $A = P_1\left(1-\frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이번달에는 원가에 $x\%$ 를 이익을 붙여 판매하였으므로 이번달의 정가(P$_2$)는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 이다.

이때 $A = P_1\left(1-\frac{x}{100}\right)$ 이므로

$P_2 = P_1\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 이다.

지난달 정가가 이번달 정가보다 지난달 정가의 $\frac{1}{25}$ 만큼 높으므로

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{25}P_1$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{25}P_1$$

$$P_1\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right) = P_1 - \frac{1}{25}P_1$$

$$P_1\left(1-\frac{x^2}{10000}\right) = \frac{24}{25}P_1$$

$$1-\frac{x^2}{10000} = \frac{24}{25}$$

$\therefore\ x = \pm 20$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.

21. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y 좌표의 값이 모두 정수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 163 개

해설

$y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-8,\ 16)$, $(8,\ 16)$
둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-8 \le x \le 8$ 이므로 이 범위 안의 정수는 $-8,\ -7,\ \cdots,\ 7,\ 8$ 의 17개가 있다. 따라서
x 좌표가 -8 일 때 : 1 개
x 좌표가 -7 일 때 :
y 좌표는 13 부터 16 까지이므로 4 개
x 좌표가 -6 일 때 :
y 좌표는 9 부터 16 까지이므로 8 개
x 좌표가 -5 일 때 :
y 좌표는 7 부터 16 까지이므로 10 개
x 좌표가 -4 일 때 :
y 좌표는 4 부터 16 까지이므로 13 개
x 좌표가 -3 일 때 :
y 좌표는 3 부터 16 까지이므로 14 개
x 좌표가 -2 일 때 :
y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개
x 좌표가 -1 일 때 :
y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개
x 좌표가 0 일 때 : 1 개
$\therefore\ 2 \times (4 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 16) + 1 = 163$ (개)

22. x 의 범위가 $0 < x < 5$ 일 때, $x = \dfrac{1}{x - [x]}$ 을 만족시키는 x 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대정수이다.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$x^2 - x[x] - 1 = 0$ 에서

(1) $0 < x < 1$ 일 때,

$[x] = 0,\quad x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$ $0 < x < 1$ 이므로 부적합

(2) $1 \le x < 2$ 일 때,

$[x] = 1,\quad x^2 - x - 1 = 0,\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $2 \le x < 2$ 이므로

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(3) $2 \le x < 3$ 일 때,

$[x] = 2,\quad x^2 - 2x - 1 = 0,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}$ $2 \le x < 3$ 이므로

$x = 1 + \sqrt{2}$

(4) $3 \le x < 4$ 일 때,

$[x] = 3,\quad x^2 - 3x - 1 = 0,\quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $3 \le x < 4$ 이므로

$x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

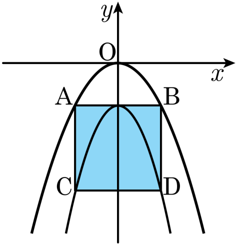
(5) $4 \le x < 5$ 일 때,

$[x] = 4,\quad x^2 - 4x - 1 = 0,\quad x = 2 \pm \sqrt{5}$ $4 \le x < 5$ 이므로

$x = 2 + \sqrt{5}$

(1), (2), (3), (4), (5) 로 부터 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x = 2 + \sqrt{5}$ 의 4 개

23. 다음 그림에서 두 점 A, B는 이차함수 $y=-x^2$ 위의 점이고, 점 C, D는 이차함수 $y=-2x^2-1$ 위의 점이다. 사각형 ABDC가 정사각형일 때, 이 정사각형의 넓이를 구하여라. (단, 사각형의 각 변은 모두 좌표축과 평행하다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 A 의 x 좌표를 a라 하면

A$(a,\ -a^2)$, B$(-a,\ -a^2)$, C$(a,\ -2a^2-1)$, D$(-a,\ -2a^2-1)$

□ABCD는 정사각형이므로

$-2a=-a^2-(-2a^2-1)$

$(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

따라서 □ABCD $=2\times 2=4$ 이다.