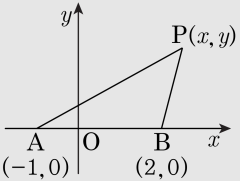
1. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면



$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

2. 두 점 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 가 그리는 도형의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-4x+6=8$

② $x^2+y^2-5x+7=5$

③ $x^2+y^2-8x+12=0$

④ $x^2+y^2-2x+1=1$

⑤ $x^2+y^2-7x+1=4$

해설

두 점 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1,\ \overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}^2=4\overline{\mathrm{PB}}^2$ 이므로

$x^2+y^2=4\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$

$x^2+y^2=4x^2+4y^2-24x+36$

$\therefore x^2+y^2-8x+12=0$

3. 두 점 A(−2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$　② $x^2+y^2+4x=0$

③ $x^2+y^2-4x=0$　④ $x^2+y^2+4y=0$

⑤ $x^2+y^2-4y=0$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$

즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로

$4\left\{(x-1)^2+y^2\right\} = (x+2)^2+y^2$

$3x^2+3y^2-12x=0$

$\therefore\ x^2+y^2-4x=0$

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,-4)$, $\mathrm{B}(5,8)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?

① $(x-3)^2+(y-2)^2=160$　② $(x-3)^2+(y+2)^2=160$

③ $(x-2)^2+(y-3)^2=40$　④ $(x+3)^2+(y+2)^2=40$

⑤ $(x-3)^2+(y-2)^2=40$

해설

$\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취는
두 점 $\mathrm{A}(1,-4)$, $\mathrm{B}(5,8)$ 을 잇는
선분 AB 를 지름으로 하는 원이므로
이 원의 중심을 (a,b) 라 하면

$$a=\frac{1+5}{2}=3,\ b=\frac{-4+8}{2}=2$$

또, 반지름의 길이 r 는

$$r=\frac{\sqrt{(5-1)^2+\{8-(-4)\}^2}}{2}=2\sqrt{10}$$

따라서, 점 P 의 자취의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=40$

5. 좌표평면 위의 두 점 $A(5,0)$, $B(-3,3)$ 과 원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진 동점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 무게중심이 그리는 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

해설

원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진
동점 P 의 좌표를 (a,b) 라 하면
$a^2+b^2=4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $\triangle ABP$ 의 무게중심을 $G(x,y)$ 라 하면
$x=\frac{a+5-3}{3},\ y=\frac{b+0+3}{3}$
$\therefore a=3x-2,\ b=3y-3$
이것을 ㉠에 대입하면
$(3x-2)^2+(3y-3)^2=4$
$\therefore \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{4}{9}$
따라서, 무게중심 $G(x,y)$ 의 자취의 길이는
반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 원의 둘레의 길이와
같으므로 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

6. $\mathrm{A}(-2,1)$과 점 $\mathrm{B}(2,-1)$을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 교점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P의 자취의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}\times\pi$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$이다.

7. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π　② $2\sqrt{3}\pi$　③ 4π　④ $2\sqrt{5}\pi$　⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\dfrac{2\times4-1\times1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

8. 두 점 A(−4, 2), B(2, −1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$

$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$\therefore \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

9. 직선 $x=2$에 접하고, 원 $(x+3)^2+y^2=1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2=-8x$ ② $y^2=8x$ ③ $y^2=-12x$

④ $x^2=-8y$ ⑤ $x^2=8y$

해설

구하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x, y)$라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2+y^2=1$의 중심을 A라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}-1=\overline{\mathrm{BP}}$ 에서

$\sqrt{(x+3)^2+y^2}-1=2-x$

$\therefore\ y^2=-12x$

10. 점 A(6, 0) 과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P 를 이은 선분 AP 의 중점의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

원 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$,
선분 AP 의 중점을 $\mathrm{M}(x,\ y)$ 라 하면,

$$x=\frac{6+a}{2},\ y=\frac{b}{2}$$

$\therefore\ a=2(x-3),\ b=2y\ \cdots$ ㉠
이 때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$4(x-3)^2+4y^2=4$
$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$
따라서 선분 AP 의 중점 M 은 중심이 (3, 0) 이고,
반지름의 길이가 1 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 길이는
$\therefore\ 2\pi\cdot1=2\pi$