

1. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

2. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

3. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

4. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

5. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\
 \therefore P^2 &\geq (가)
 \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
 등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
 ④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2 = \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

조건에서 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\
 &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\
 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3)
 \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$