

1. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z - \bar{z} = 2i$, $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 가 성립할 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $z - \bar{z} = 2i$ 에서 $a + bi - (a - bi) = 2i$, $2bi = 2i$
 $\therefore b = 1$
 $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 에서 $\frac{a-i}{a+i} = -i$
 $\frac{(a-i)^2}{a^2+1} = -i$, $\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1} = -i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
(i) 실수부분이 0이어야 하므로
 $\frac{a^2-1}{a^2+1} = 0$, $a^2-1 = 0$
 $\therefore a = \pm 1$... ㉠
(ii) 허수부분이 -1이어야 하므로
 $\frac{-2a}{a^2+1} = -1$, $a^2+1 = 2a$
 $a^2-2a+1 = 0$, $(a-1)^2 = 0$
 $\therefore a = 1$... ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a = 1$
 $\therefore z \cdot \bar{z} = (1+i)(1-i) = 1+1 = 2$

2. $\frac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\frac{3+11i}{8}$
④ $\frac{3+11i}{10}$

② $\frac{9+11i}{8}$
⑤ $\frac{9+11i}{10}$

③ $\frac{3+9i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{6-3+11i}{3+11i} \\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

3. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면
 $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$
근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면
 $x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$
 $= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
 $= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$
 $\therefore x = 3\sqrt{3} + 3$ 또는 $x = -\sqrt{3} - 1$
큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$
그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7 \dots$ 이므로
가장 가까운 정수는 8이다.

4. 다음 방정식을 풀면?

$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$

- ① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$
 $2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$
 $x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$
 $(x-1)\{x-(\sqrt{3}+1)\}=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

5. 복소수들 사이의 연산 $*$ 가 다음과 같다고 하자.

$$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$$

이 때, $(1 + 2i) * z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $-1 + i$

④ $-1 - i$

⑤ i

해설

$z = a + bi$ 라 하면

$$(1 + 2i) * z$$

$$= (1 + 2i) + (a + bi) + (1 + 2i)(a + bi)i$$

$$= (-a - b + 1) + (a - b + 2)i = 1$$

$$-a - b + 1 = 1, \quad a - b + 2 = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$\therefore z = -1 + i$$

6. $a = 2 + \sqrt{3}i$, $b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{7}$

해설

$a = 2 + \sqrt{3}i$, $b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \dots \textcircled{1}$$

이 때, $a + b = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$

$$ab = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) \\ = 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 + 3 = 7 \text{ 이므로}$$

$a + b = 4$, $ab = 7$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\ = \frac{16 - 14}{7} = \frac{2}{7}$$

7. $z = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i} \\ = -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1 \\ = -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

8. $x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2 - 6x + 1 = -2$, $9x^2 - 6x = -3$

양변을 3으로 나누면

$\therefore 3x^2 - 2x = -1$