1. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$ 에 대하여 $z-\overline{z}=2i$, $\dfrac{\overline{z}}{z}=-i$ 가 성립할 때, $z\cdot\overline{z}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$z-\overline{z}=2i$ 에서 $a+bi-(a-bi)=2i$, $2bi=2i$

$\therefore\ b=1$

$\dfrac{\overline{z}}{z}=-i$ 에서 $\dfrac{a-i}{a+i}=-i$

$\dfrac{(a-i)^2}{a^2+1}=-i$, $\dfrac{a^2-1-2ai}{a^2+1}=-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0 이어야 하므로

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=0\ ,\ a^2-1=0$$

$\therefore a=\pm1 \qquad \cdots$ ㉠

(ii) 허수부분이 -1 이어야 하므로

$$\frac{-2a}{a^2+1}=-1\ ,\ a^2+1=2a$$

$$a^2-2a+1=0\ ,\ (a-1)^2=0$$

$\therefore a=1 \qquad \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=1$

$\therefore\ z\cdot\overline{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

2. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3+11i}{8}$ ② $\dfrac{9+11i}{8}$ ③ $\dfrac{3+9i}{10}$

④ $\dfrac{3+11i}{10}$ ⑤ $\dfrac{9+11i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{6-3+11i}{10} \\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

3. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

4. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

5. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1 + i$

6. $a=2+\sqrt{3}i,\ b=2-\sqrt{3}i$ 일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{2}{7}$

해설

$a=2+\sqrt{3}i,\ b=2-\sqrt{3}i$ 일 때

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\cdots ㉠$$

이 때, $a+b=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$

$ab=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$

$=2^2-(\sqrt{3}i)^2=4+3=7$ 이므로

$a+b=4,\ ab=7$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$$

$$=\frac{16-14}{7}=\frac{2}{7}$$

7. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i}$$

$$= -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$$

$$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

8. $x = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2 - 6x + 1 = -2$, $9x^2 - 6x = -3$

양변을 3으로 나누면

$\therefore\ 3x^2 - 2x = -1$