1. $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{7}{10}$ 사이의 분수 중 분모가 30 이고 분자가 자연수이면서 유한소수로 나타낼 수 있는 분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{18}{30}$

해설

$\frac{1}{2} = \frac{15}{30} < \frac{x}{30} < \frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

x는 $15 < x < 21$ 인 3의 배수이므로 18이다.

2. 두 일차함수 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분된다. 이때, $\frac{a+b}{a-b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프는 y 절편이 서로 같으므로 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분되려면 두 그래프의 x 절편의 부호는 반대이고 절댓값은 같아야 한다.

각각의 x 절편은 $-\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{b}$ 이므로

$\therefore\ a = -b$

따라서 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{-b+b}{-b-b} = 0$ 이다.

3. $ab > 0,\ a + b < 0,\ a > b$ 일 때, 다음 중 $\boxed{}$ 안에 들어갈 부등호의 방향이 <u>다른</u> 것은?

① $a + 1 \ \square\ b + 1$　　② $2a - 1 \ \square\ 2b - 1$

③ $-\frac{1}{a} \ \square\ -\frac{1}{b}$　　④ $1 - 3a \ \square\ 1 - 3b$

⑤ $\frac{a}{3} \ \square\ \frac{b}{3}$

해설

$ab > 0,\ a + b < 0$ 이므로 $0 > a > b$ 이다.

① $a + 1 > b + 1$

② $2a - 1 > 2b - 1$

③ $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$

④ $1 - 3a < 1 - 3b$

⑤ $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$

4. 자연수 $a,\ b$ 에 대하여 $(x^a y)^4 = x^{12} y^b$ 인 관계가 있을 때, $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^a \div \left(\frac{1}{4}x^b y^2\right)^a \times (xy)^b$ 을 간단히 한 것은?

① $-\frac{8y}{x^2}$　② $\frac{8y}{x^2}$　③ $-\frac{8y}{x}$　④ $-\frac{y}{x^2}$　⑤ $\frac{8y^2}{x^2}$

해설

$(x^a y)^4 = x^{12} y^b$ 에서 $a = 3,\ b = 4$ 이므로

$$\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^a \div \left(\frac{1}{4}x^b y^2\right)^a \times (xy)^b$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 \div \left(\frac{1}{4}x^4 y^2\right)^3 \times (xy)^4$$
$$= \frac{x^6 y^3}{-8} \times \frac{64}{x^{12} y^6} \times \frac{x^4 y^4}{1}$$
$$= -\frac{8y}{x^2}$$

5. 길이가 83 cm 인 철사로 정삼각형 1 개와 정사각형 1 개를 만들고 3 cm 가 남았다. 정삼각형의 한 변의 길이는 정사각형의 한 변의 길이의 2 배일 때, 정사각형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답 : 64 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

정삼각형의 한 변의 길이를 x cm, 정사각형의 한 변의 길이를 y cm라 하면
$3x + 4y + 3 = 83$,
$x = 2y$
연립방정식을 풀면 $x = 16, y = 8$
따라서 정사각형의 넓이는 $8 \times 8 = 64(\text{cm}^2)$ 이다.

6. 무한소수 $\frac{7}{110}$ 과 $\frac{1}{35}$ 에 자연수 a 를 곱했더니 모두 유한소수가 되었다. 이러한 a 값 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$\frac{7}{110} \times a = \frac{7}{2 \times 5 \times 11} \times a$ 가 유한소수가 되려면 a 는 11 의 배수.
$\frac{1}{35} \times a = \frac{1}{5 \times 7} \times a$ 가 유한소수가 되려면 a 는 7 의 배수이어야 한다.
따라서 a 는 77 의 배수이므로 가장 작은 자연수 a 는 $a = 77$ 이다.

7. 부등식 $ax-3>x+5$ 를 바르게 계산한 것을 고르면? (단, $a<1$)

① $x>\frac{8}{a-1}$ ② $x>\frac{a-1}{8}$ ③ $x<\frac{8}{a-1}$
④ $x<-\frac{8}{a-1}$ ⑤ $x<\frac{8}{a}$

해설

$ax-3>x+5$
$ax-x>5+3$
$(a-1)x>8$
이때, $a<1$ 이므로 부등호의 방향이 바뀌어,
$x<\frac{8}{a-1}$

8. $b < a < 0$일 때, 다음 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $a + c > b + c$　② $ac > bc$　③ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

④ $a^2 < b^2$　⑤ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

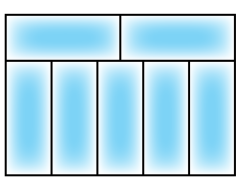
해설

① 부등식의 성질

④ $a = -1,\ b = -2$ 이면 $(-1)^2 < (-2)^2,\ 1 < 4$

⑤ $a = -1,\ b = -2$ 이면 $-1 < -\frac{1}{2}$

9. 다음 그림과 같이 크기가 같은 직사각형 모양의 타일 7 개를 겹치지 않게 빈틈없이 붙여 큰 직사각형 모양을 만들었더니 그 둘레의 길이가 88cm 였다. 이 때, 큰 직사각형의 넓이를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답: $\underline{\dfrac{135520}{289}\text{cm}^2}$

해설

타일 한 장의 긴 모서리의 길이를 $x$cm , 짧은 모서리의 길이를 $y$cm 라 하면 $(x > y)$

$2x = 5y$

또, 둘레의 길이가 88cm 이므로

$2x + 2(x + y) + 5y = 88, 4x + 7y = 88$

연립방정식을 풀면

$\therefore\ x = \dfrac{220}{17}\ , y = \dfrac{88}{17}$

큰 직사각형의 넓이는

$\left(2 \times \dfrac{220}{17}\right) \times \left(\dfrac{220}{17} + \dfrac{88}{17}\right) = \dfrac{135520}{289}(\text{cm}^2)$ 이다.

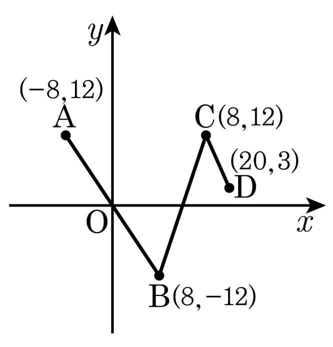
10. $\dfrac{14a}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되기 위한 a 의 개수는?
(단, $a \le 100$, a 는 자연수)

① 30 개 ② 31 개 ③ 32 개 ④ 33 개 ⑤ 34 개

해설

$\dfrac{14a}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \dfrac{a}{2^2 \times 3 \times 5^2}$ 가 유한소수이므로 a 는 100 이하의 3 의 배수이다.

11. x의 값의 범위가 $-8 \le x \le 20$일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(k-3) = f(k+3)$ 을 만족하는 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 49

해설

직선 AB 의 방정식 $y = -\frac{3}{2}x \cdots$ ㉠

직선 BC 의 방정식 $y = 3x - 36 \cdots$ ㉡

직선 CD 의 방정식 $y = -\frac{9}{4}x + 48 \cdots$ ㉢

$f(k-3) = f(k+3)$ 에서 $k - 3 = x$ 일 때,
$f(x) = f(x+6)$ 이므로

1) ㉡에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면
$y = 3x - 18 \cdots$ ㉣
㉠, ㉣의 값이 같으므로
$-\frac{3}{2}x = 3x - 18$,
$x = 4 \quad \therefore\ k = 7$

2) ㉢에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면
$y = -\frac{9}{4}x + \frac{69}{2} \cdots$ ㉤
㉠, ㉤의 값이 같으므로
$-\frac{3}{2}x = -\frac{9}{4}x + \frac{69}{2}$,
$x = 46 \quad \therefore\ k = 49$

따라서 k 의 값은 7 또는 49 이다.

12. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 사이에 $ab > 0$, $bc < 0$, $b > c$ 인 관계가 있을 때, $-\frac{1}{2}(c-b-a)x < 2(a+b-c)$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < 4$

해설

$ab > 0$ 이므로 a 와 b 의 부호는 같다.
$bc < 0$ 이므로 b 와 c 의 부호는 서로 반대이다. $b > c$ 이므로 b 가 양수이고 c 가 음수가 되어야 한다.
a 와 b 의 부호는 같다고 했으므로 a 의 부호도 양수이다. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$
그러므로 $a+b-c > 0$ 임을 알수있다.

$$-\frac{1}{2}(c-b-a)x < 2(a+b-c)$$

$$(c-b-a)x > -4(a+b-c)$$

$$-(a+b-c)x > -4(a+b-c)$$

$$x < \frac{-4(a+b-c)}{-(a+b-c)} = 4$$

13. $x=2$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-4$ 일 때, $\frac{xy^2z-2x^2y+5yz^2}{3x^2yz}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{13}{9}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{y}{3x}-\frac{2}{3z}+\frac{5z}{3x^2}\\ &= \frac{\frac{1}{3}}{6}-\left(\frac{2}{-12}\right)+\left(-\frac{20}{12}\right)\\ &= \frac{1}{18}+\frac{1}{6}-\frac{5}{3}\\ &= -\frac{13}{9}\end{aligned}$$

14. 길이가 207 cm 인 테이프로 정육각형 1 개와 마름모 2 개의 둘레를 따라 붙이려고 했더니 3 cm 가 부족했다. 마름모의 한 변의 길이는 정육각형의 한 변의 길이의 3 배일 때, 마름모 한 개와 둘레의 길이가 똑같은 원의 반지름을 구하여라.

▶ 답: ________ cm

▷ 정답: $\frac{70}{\pi}$ cm

해설

정육각형의 한 변의 길이를 x cm, 마름모 한 변의 길이를 y cm라 하면

$6x + 4y = 207 + 3$,

$y = 3x$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{35}{3}$, $y = 35$

마름모 한 개의 둘레의 길이는 $35 \times 4 = 140$(cm) 이고 이를 원주로 가지는 원의 반지름을 r 이라 놓고 구하면, $2\pi r = 140$,

$r = \frac{70}{\pi}$(cm) 이다.

15. $(-3x^a)^b = -27x^{18}$ 을 만족하는 a, b 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$(-4a^4b^2)^2 \div 8a^4b^2 \div (-a)^3$

▶ 답 :

▷ 정답 : -108

해설

$(-3x^a)^b = -27x^{18}(-3x^a)^b = (-3)^b \times x^{a\times b}$,

$$(-3)^b \times x^{ab} = -27x^{18}$$

$$(-3)^b = -27, x^{ab} = x^{18}$$

$$\therefore b = 3, a = 6$$

$(-4a^4b^2)^2 \div 8a^4b^2 \div (-a)^3 = 16a^8b^4 \div 8a^4b^2 \div (-a)^3 = -2ab^2$
$a = 6,\ b = 3$ 이므로, $-2ab^2 = (-2) \times 6 \times 3^2 = -108$

16. $a < 0$일 때, 부등식 $ax - 3 > 2$를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < \frac{5}{a}$

해설

$ax - 3 > 2$

$ax > 5$

$a < 0$ 이므로 $x < \frac{5}{a}$

17. $a \geq b$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

① $1-\frac{a}{3} \geq 1-\frac{b}{3}$

② $-2a+1 \leq -2b+1$

③ $4+\frac{a}{2} \leq 4+\frac{b}{2}$

④ $3a-5 \geq 3b-5$

⑤ $\frac{3}{4}a+6 \leq \frac{3}{4}b+6$

해설

② $-2a+1 \leq -2b+1$ 양변에 음수를 곱하여서 부등호 방향이 바뀌었다.

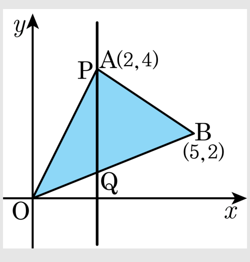
④ $3a-5 \geq 3b-5$ 양변에 같은 수를 빼어도 부등호 방향은 바뀌지 않는다.

18. 세 점 원점 O, A$(2,\ 4)$, B$(5,\ 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB 가 있다. y 축에 평행한 직선이 삼각형 AOB 와 두 점 P, Q 에서 만난다고 하고 선분 PQ 의 길이를 최대로 만드는 점 P 의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 Q 의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$ 라 할 때, $x_1x_2 - y_1y_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{5}$

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 P 는 점 A 와 같아야 한다.
즉, y 축과 평행한 직선의 그래프는 $x = 2$ 이고,
점 Q 의 좌표는 직선 OB 와 $x = 2$ 의 교점이다.
직선 OB 의 그래프는 $(0,\ 0)$ 와 $(5,\ 2)$ 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$y = \frac{2}{5}x$

$y = \frac{2}{5}x$ 와 $x = 2$ 의 교점의 좌표는 Q$\left(2,\ \frac{4}{5}\right)$

P$(2,\ 4)$, Q$\left(2,\ \frac{4}{5}\right)$ 이므로

$\therefore\ x_1x_2 - y_1y_2 = 2 \times 2 - 4 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$