

1. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a \cdots \cdots \textcircled{1}$
(두 근의 곱) $= (1 + 2i)(1 - 2i) = b \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $a = -2, b = 5$ 이다.

3. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
 $a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$
 $-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$
 $b = -3, a = 12$
따라서 $a + b = 9$

4. x 에 대한 이차식 $x^2 - 2(k+a)x + (k+1)^2 + a^2 - b - 3$ 이 k 에 관계없이 완전제곱식이 되는 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

완전제곱식이면 판별식이 0이다.

$$\Rightarrow D' = (k+a)^2 - (k+1)^2 - a^2 + b + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2(a-1)k + b + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = -2,$$

$$\therefore a + b = -1$$

5. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

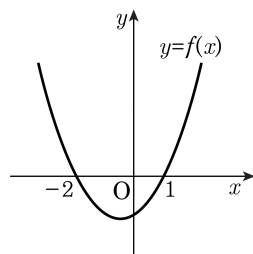
▷ 정답 : 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우
 a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은
 $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$
(ii) c 를 잘못 본 경우
 a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은
 $-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$
(i), (ii)에서 주어진 방정식은
 $ax^2 - 3ax + 2a = 0$
 $a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1



해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

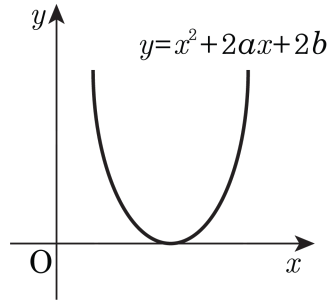
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

7. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

8. $2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1 \\ &= 2x^2 - (3y + 3)x + my^2 + y + 1 \\ &\text{이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로} \\ &D = (3y + 3)^2 - 8(my^2 + y + 1) \\ &= 9y^2 + 18y + 9 - 8my^2 - 8y - 8 \\ &= (9 - 8m)y^2 + 10y + 1 \\ &\text{여기서 } D/4 = 25 - (9 - 8m) = 0 \text{ 이어야 하므로} \\ &25 - 9 + 8m = 0 \\ &8m = -16 \\ &\therefore m = -2 \end{aligned}$$

9. 이차방정식 $x^2 - (p + 4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근의 차가 2가 되는 q 의 최솟값은 ?

- ① 5
- ② 4
- ③ 3
- ④ 2
- ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2 - (p + 4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근을 α , $\alpha + 2$ 라고 하면

$$|\alpha + 2 - \alpha| = \frac{\sqrt{(p + 4)^2 - 4(q - 2)}}{1} = |2|$$

$$\sqrt{p^2 + 8p + 16 - 4q + 8} = 2$$

양변을 제곱하여 q 에 관해 정리하면

$$4 = p^2 + 8p + 16 - 4q + 8, 4q = p^2 + 8p + 20$$

$$q = \frac{1}{4}p^2 + 2p + 5 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = p + 4, \alpha\beta = q - 2$$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = 2$$

$$\sqrt{(p + 4)^2 - 4(q - 2)} = 2$$

양변을 제곱하면

$$(p + 4)^2 - 4(q - 2) = 4$$

q 에 대해 정리하면

$$q = \frac{1}{4}(p + 4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.

10. $x^2 + ax + (a^2 + 2a - 3) = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a < 1$ ② $\frac{1}{2} < a < 2$ ③ $1 \leq a < 2$
④ $2 < a \leq 3$ ⑤ $-\frac{1}{2} < a < 2$

해설

두 근을 α, β 라 하면

$|\text{음근}| > \text{양근}$ 이므로

$$\alpha + \beta = -a < 0, \alpha\beta = a^2 + 2a - 3 < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, PQ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5

② $5\sqrt{2}$

③ 7

④ $7\sqrt{2}$

⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x 좌표가 -3 이므로
 $\textcircled{1}$ 에 $x = -3$ 을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
 $\therefore k = 5$
 $k = 5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q 가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
 $P(-3, 2), Q(2, 7)$
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$
 $= 5\sqrt{2}$

12. 방정식 $|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a 의 값은?

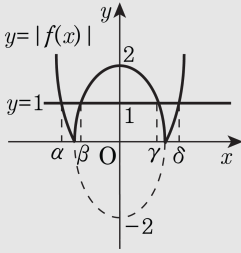
- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a - 2)x - 2 = \pm 1$
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a - 2)$
... ㉠
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a - 2)$
... ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a - 2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a - 2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore a - 2 = 0, a = 2$

13. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $f(\alpha) = \beta + 1, f(\beta) = \alpha + 1$ 을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1 \ (\alpha \neq \beta)$
 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면
 $f(\alpha) = \alpha^2 + a\alpha + b = \beta + 1$
 $f(\beta) = \beta^2 + a\beta + b = \alpha + 1$
 $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 + a(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)$
 $\alpha \neq \beta$ 이므로 양변을 $\alpha - \beta$ 로 나누면
 $\alpha + \beta + a = -1 \quad \therefore a = -2 \ (\because \alpha + \beta = 1)$
 $f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + b = \beta + 1$
 $f(\beta) = \beta^2 - 2\beta + b = \alpha + 1$
 $f(\alpha) + f(\beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
 $1 - 2 - 2 + 2b = 3 \quad \therefore b = 3$
 $\therefore f(x) = x^2 - 2x + 3$
 $f(1) = 2$

14. 직선 $y = -2x + 2$ 에 접하는 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 x 축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

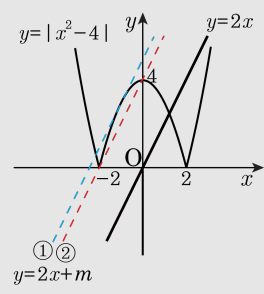
해설

포물선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = -2x + 2$
 $x^2 + ax + b = -2x + 2 \Rightarrow x^2 + (a+2)x + b-2 = 0$
두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.
 $D = (a+2)^2 - 4(b-2) = 0$
 $\therefore b = \frac{1}{4}(a^2 + 4a + 12) \quad \cdots \textcircled{A}$
포물선과 x 축과의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = 0$ 이 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 $|\alpha - \beta| = 2$ 이므로 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b = 4 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a^2 - (a^2 + 4a + 12) = 4$
 $\therefore a = -4, b = 3 \quad \therefore a + b = -1$

15. x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4| = 2x + m$ 이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m 의 값 또는 m 의 값의 범위는?
- ① $-4 < m < 4$ ② $m = -4$
 ③ $m = 4$ 또는 $m = 5$ ④ $4 < m < 5$
 ⑤ $m > 5$

해설

$y = |x^2 - 4|$ 와 $y = 2x + m$ 을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

- ① $-x^2 + 4 = y$ 와 $2x + m = y$ 이 접하는 경우
 $-x^2 + 4 = 2x + m$
 $x^2 + 2x + m - 4 = 0$
 $\frac{D}{4} = 1 - m + 4 = 0$
 $\therefore m = 5$
 ② $y = 2x + m$ 이 $(-2, 0)$ 을 지나는 경우
 $0 = -4 + m$
 $\therefore m = 4$
 구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로
 $\therefore 4 < m < 5$