1. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.

(두 근의 합) $= (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a \quad \cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱) $= (1 + 2i)(1 - 2i) = b \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서

$a = -2,\ b = 5$ 이다.

3. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

4. x에 대한 이차식 $x^2 - 2(k+a)x + (k+1)^2 + a^2 - b - 3$이 k에 관계없이 완전제곱식이 되는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

완전제곱식이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = (k+a)^2 - (k+1)^2 - a^2 + b + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 2(a-1)k + b + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -2,$

$\therefore \quad a + b = -1$

5. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

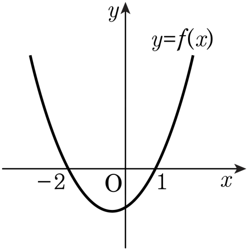
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a} \quad \therefore\ c=2a$
(ii) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1+4=3=-\frac{b}{a} \quad \therefore\ b=-3a$
(i), (ii)에서 주어진 방정식은
$ax^2-3ax+2a=0$
$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
따라서 근의 합은 3이다.

6. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

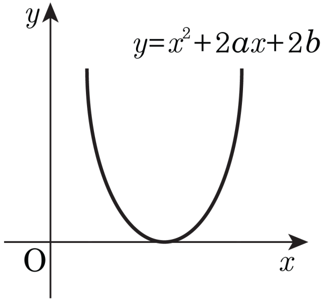
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

7. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

8. $2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m의 값은?

① -3　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 3

해설

$2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$

$=2x^2-(3y+3)x+my^2+y+1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D=(3y+3)^2-8(my^2+y+1)$

$\quad=9y^2+18y+9-8my^2-8y-8$

$\quad=(9-8m)y^2+10y+1$

여기서 $D/4=25-(9-8m)=0$이어야 하므로

$25-9+8m=0$

$8m=-16$

$\therefore m=-2$

9. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha|=\frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

10. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$ ② $\frac{1}{2}<a<2$ ③ $1\le a<2$

④ $2<a\le 3$ ⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 α, β라 하면

$|$음근$|$ > 양근이므로

$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=a^2+2a-3<0$

$\therefore\ 0<a<1$

11. 이차함수 $y=x^2+2x-1$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y=x^2+2x-1$ 의 그래프와
직선 $y=x+k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2+2x-1=x+k$
즉 $x^2+x-1-k=0\cdots$㉠의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x=-3$을 대입하면 $9-3-1-k=0$
$\therefore\ k=5$
$k=5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y=x+5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2,7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(7-2)^2}=\sqrt{50}$$
$$=5\sqrt{2}$$

12. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$| x^2 + (a-2)x - 2 | = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$

$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$ … ㉠

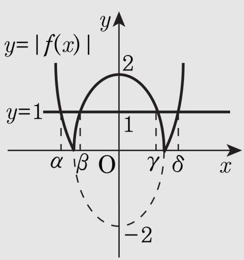
$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$ … ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

13. $x^2-x+1=0$ 의 두 근을 α,β라 하면 $f(\alpha)=\beta+1$, $f(\beta)=\alpha+1$을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ $(\alpha\neq\beta)$

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$f(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$ 이므로 양변을 $\alpha-\beta$ 로 나누면

$\alpha+\beta+a=-1$ $\quad\therefore a=-2$ $(\because \alpha+\beta=1)$

$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2-2\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$1-2-2+2b=3$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore f(x)=x^2-2x+3$

$f(1)=2$

14. 직선 $y=-2x+2$에 접하는 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 x축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x좌표를 구하는 식은
$x^2+ax+b=-2x+2$ $x^2+(a+2)x+b-2=0$
두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.
$\mathrm{D}=(a+2)^2-4(b-2)=0$
$\therefore\ b=\frac{1}{4}(a^2+4a+12)\quad\cdots$ ㉠
포물선과 x축과의 교점의 x좌표를 구하는 식은
$x^2+ax+b=0$이 방정식의 두 근을 α, β라 하면
$|\alpha-\beta|=2$이므로 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b=4\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2-(a^2+4a+12)=4$
$\therefore\ a=-4,\ b=3\quad\therefore\ a+b=-1$

15. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

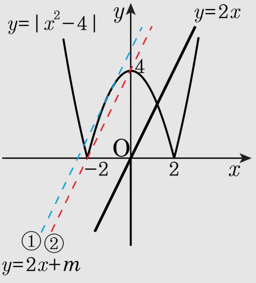
① $-4<m<4$　② $m=-4$

③ $m=4$ 또는 $m=5$　④ $4<m<5$

⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우

$-x^2+4=2x+m$

$x^2+2x+m-4=0$

$\frac{D}{4}=1-m+4=0$

$\therefore\ m=5$

② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우

$0=-4+m$

$\therefore\ m=4$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$\therefore\ 4<m<5$