**1.** 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $f(x)$ 를 $x^2-1$ 로 나눈 나머지가 2 이고 $g(x)$ 를 $x^2-3x+2$ 로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이다. $2f(x)+3g(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① 13 ② $-13$ ③ 16 ④ $-16$ ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

**2.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 $k$의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$

④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \geq 0$

$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

**3.** $a$, $b$, $c$가 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

**해설**

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

**4.** $a, b, c$는 실수이고, $a > 0, ac-b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, $x$의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

**해설**

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 $D$라 하면

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$

$\quad = (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ ($\because\ b \neq 0$)

$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

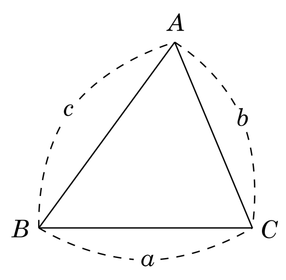
**5.** 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$
한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$|\alpha-\beta|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$
$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$
$=\frac{40}{9}$
따라서, $|\alpha-\beta|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

**6.** 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 $\triangle$ABC에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?




① $a=b$인 이등변삼각형

② $a=c$인 이등변삼각형

③ $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형

④ $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형

⑤ $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
$=0$
이 때, $a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a\neq b+c$
$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0,$
즉 $a^2=b^2+c^2$
따라서, $\triangle$ABC는 $a$를 빗변으로 하는 직각삼각형,
즉 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

**7.** 삼각형의 세변의 길이를 $x$, $y$, $z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① $x$가 빗변인 직각삼각형

② $y$가 빗변인 직각삼각형

③ $z$가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, $z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\} z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ $x$, $y$, $z$는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

**8.** 다항식 $f(x)$를 $x^2-4$로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 $x^2+2x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+3$ ③ $x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$

$\quad =(x+2)(x-2)P(x)-x+4$

$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$

$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

**9.** 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 $k$의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k \ge 2$　③ $-2 \le k < 2$
④ $4 < k \le 6$　⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.
(ⅰ) $D=(k-4)^2-4 \ge 0$,  $k^2-8k+12 \ge 0$
$(k-2)(k-6) \ge 0$
$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$
(ⅱ) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$ ,  $k < 4$
(ⅰ), (ⅱ) 의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

**10.** 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 $\alpha, \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

**11.** 이차방정식 $x^2 + 2(k-11)x - k + 3 = 0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 $k$의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때,

$\alpha\beta = -k + 3 < 0$ , $\alpha + \beta = -2(k-11) > 0$

$\therefore \quad 3 < k < 11$

**12.** 이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 두 근을 $\alpha,\beta$라 할 때, $\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}$의 값은?

① $-5$　② $-4$　③ $3$　④ $4$　⑤ $5$

해설

$\alpha+\beta=-4$ , $\alpha\beta=2$
$(\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2})^2$
$=-4(\alpha+\beta)+2\sqrt{16\alpha\beta+8(\alpha+\beta)+4}-4$
$=16+2\sqrt{4}-4=16$
$\therefore\ \sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}=4$ $(\because$ 준식$>0)$

**13.** 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① $-4$　② $-2$　③ $0$　④ $2$　⑤ $4$

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \dfrac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

**14.** 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① $R$　② $aR$　③ $bR$　④ $-\frac{b}{a}R$　⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad \therefore\ R=f(-\frac{b}{a})$

$g(x)=xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}R$

**15.** $x, y, z$가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $z$가 빗변인 직각삼각형
② $x$가 빗변인 직각삼각형
③ $x=y$인 이등변삼각형
④ $y=z$인 이등변삼각형
⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$
$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$
$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$
$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

**16.** 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3-ac^2+a^2b+ab^2+a^3-bc^2=0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 $c$에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+b^3+ab^2=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$

$-(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b\neq 0)$

$c^2-a^2-b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ C=90^\circ$인 직각삼각형

**17.** 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, $a$, $b$, $c$는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\frac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

**18.** 다음 $x$의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 $m$의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
준식을 $x$에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0$,
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

**19.** $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 $\alpha$, $\beta$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0,\ 5k^2 \geq 5,\ \therefore k^2 \geq 1$

$\alpha+\beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5-k^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18,\ 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2+\beta^2 \geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$= 8$

**20.** $a$, $b$, $c$가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$ 인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형
② $a=c$인 이등변 삼각형
③ 정삼각형
④ $a$가 빗변인 직각 삼각형
⑤ $b$가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$
$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$