1. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2,$

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1,$

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$

④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \geq 0$

$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

3. a, b, c가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

4. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$$
$$= (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots ㉠ \ (\because \ b \neq 0)$$

$a > 0, \ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots ㉡$

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

5. 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　② $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　③ $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$
④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$

한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

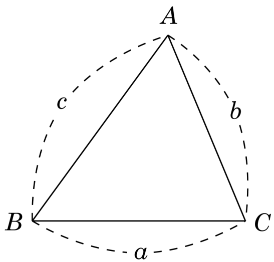
$|\alpha-\beta|^2=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

$=\dfrac{16}{9}+\dfrac{8}{3}$

$=\dfrac{40}{9}$

따라서, $|\alpha-\beta|=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

6. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형　② $a=c$인 이등변삼각형

③ $\angle\mathrm{A}=90°$인 직각삼각형　④ $\angle\mathrm{B}=90°$인 직각삼각형

⑤ $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각삼각형

해설

$$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$$
$$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$$
$$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$$
$$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$$
$$=0$$

이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a\neq b+c$

$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,

즉 $a^2=b^2+c^2$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,

즉 $\angle\mathrm{A}=90°$인 직각삼각형이다.

7. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

8. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+3$ ③ $x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$$
$$=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$$
$$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$$
$$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

9. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k \ge 2$　③ $-2 \le k < 2$

④ $4 < k \le 6$　⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.

(i) $D=(k-4)^2-4 \ge 0$,　$k^2-8k+12 \ge 0$

$(k-2)(k-6) \ge 0$

$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$

(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$, $k < 4$

(i), (ii)의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

10. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$$

11. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 11)x - k + 3 = 0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta = -k + 3 < 0$, $\alpha + \beta = -2(k - 11) > 0$

$\therefore \quad 3 < k < 11$

12. 이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}$의 값은?

① -5 ② -4 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$

$(\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2})^2$

$=-4(\alpha+\beta)+2\sqrt{16\alpha\beta+8(\alpha+\beta)+4}-4$

$=16+2\sqrt{4}-4=16$

$\therefore\ \sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}=4\ \ (\because$ 준식$>0)$

13. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

14. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad \therefore\ R=f(-\frac{b}{a})$

$g(x)=xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}R$

15. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형
② x가 빗변인 직각삼각형
③ $x=y$인 이등변삼각형
④ $y=z$인 이등변삼각형
⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$

$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$

$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$

$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)

$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

16. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

17. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

18. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

준식을 x에 관해서 정리하면,

$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$

따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$

즉 $m^2-3m-10=0$

$(m-5)(m+2)=0\quad\therefore\ m=5,\ -2\ \cdots\cdots㉠$

$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$

$(m-3)(m+6)<0\quad\therefore\ -6<m<3\ \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

19. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0,\ 5k^2 \geq 5,\ \therefore k^2 \geq 1$

$\alpha + \beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18,\ 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$= 8$

20. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형

② $a=c$인 이등변 삼각형

③ 정삼각형

④ a가 빗변인 직각 삼각형

⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$$
$$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$$
$$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$$
$$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$$