**1.** $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 $x$에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8  ② 16  ③ 32  ④ 64  ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
$\therefore\ 2^5 = 32$

**2.** 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 $l$이라 하면,
$a = b^2 + 1 \cdots\cdots$ ㉠
$l = \dfrac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡
㉠를 ㉡에 대입하면
$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$
$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$일 때 $l$이 최소가 된다.
따라서 $a + b = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{4}$이므로
$\therefore\ 4(a + b) = 7$

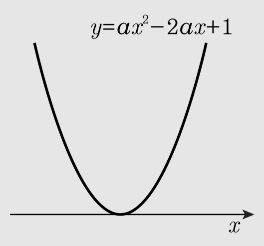
**3.** 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.




( i ) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
( ii ) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 $D$ 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
( i ), ( ii ) 에서 $a = 1$

**4.** $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0  ② 1  ③ $2^{24}$  ④ $2^{25}$  ⑤ $2^{50}$

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$
$x = 1$을 양변에 대입하면
$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①
$x = -1$을 양변에 대입하면
$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②
① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$
$a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{50} = 0$

**5.** 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 $r$ 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$r = \dfrac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

**6.** $x$에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \ge 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \le 0$을 동시에 만족하는 $x$의 값의 존재하지 않도록 상수 $a$의 값의 범위는?

① $-3<a<12$　② $-3<a<8$　③ $-3<a<4$

④ $-2<a<12$　⑤ $-2<a<3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \ge 0 \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \le \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \ge 0 \\ \therefore x \le -2 \text{또는} x \ge 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$\underbrace{-2 < a^2-a}_{(다)}$, $\underbrace{a^2-a < 12}_{(라)}$

(다)에서

$a^2-a+2>0,\ \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

$\therefore$ 모든 실수
(라)에서
$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$
$\therefore -3<a<4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3<a<4$

**7.** $x$에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 $a$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

**8.** 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, $m$ 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

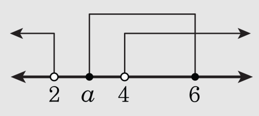
$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

**9.** 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \le 6$이 되도록 실수 $a$의 값의 범위를 정할 때, $a$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \le 0 \end{cases}$$

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설




$x^2 - 6x + 8 > 0$에서

$(x-2)(x-4) > 0$

$\therefore x < 2$ 또는 $x > 4$

$x^2 - (a+6)x + 6a \le 0$에서

$\Rightarrow (x-a)(x-6) \le 0$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \le 6$ 이 되려면

$(x-a)(x-6) \le 0$의 해가 $a \le x \le 6$이어야 하고,

$2 \le a \le 4$ 이어야 한다

$\therefore a$의 최솟값 : 2,　최댓값 : 4

**10.** 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 $x$ 축보다 위쪽에 있는 $x$ 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, $m, n$ 은 상수)

① $-4$　② $-2$　③ $-1$　④ $2$　⑤ $4$

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가
$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고
$m(x+1)(x-3) > 0$
$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$
이것이 ㉠과 일치하므로
$n = -2m,\ mn + 2 = -3m$
두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서
$2m^2 - 3m - 2 = 0$ , $(2m+1)(m-2) = 0$
$\therefore m = -\frac{1}{2}$ $(\because m < 0)$
따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

**11.** 부등식 $x^2-4x+3>0$과 $2x^2+(a-8)x-4a<0$을 동시에 만족하는 정수인 $x$의 값이 0뿐 일 때, 실수 $a$의 값의 범위는?

① $0 \le a \le 2$ ② $0 \le a < 2$ ③ $0 < a \le 2$

④ $-1 < a \le 0$ ⑤ $-1 \le a < 0$

해설

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x>3$ 또는 $x<1 \cdots$①

$2x^2+(a-8)x-4a$

$=(2x+a)(x-4)<0$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$-\dfrac{a}{2}<4$

$\therefore\ -\dfrac{a}{2}<x<4 \cdots$②

①과 ②에 의하여 $-1 \le -\dfrac{a}{2} < 0$

$\therefore\ 0<a\le 2$

**12.** 모든 실수 $x$에 대하여 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$이라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

**해설**

$2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$x=2$를 대입하면,

$\{2\times(2)^3\}-(3\times 2^2)-2+1=a+b+c+d$

$\therefore a+b+c+d=3$

**13.** 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 $m$ 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$
③ $-1<m<1$　　④ $-2<m<2$
⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$\left(m^2+1\right)x^2-4mx+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3\left(m^2+1\right)=m^2-3$
원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$
$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면
각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$
이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서
직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 $d$ 라고 하면
$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로
$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$
$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

**14.** $0 < x < 1$ 인 모든 $x$ 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \leq (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 $a$ 의 범위를 구하면?

① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \geq -1$
④ $a < -1$　　⑤ $a \leq -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 되도록 하자.
$f(0) \leq 0$ 그리고 $f(1) \leq 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \leq 0$ 에서 $a \geq -1$

**15.** 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 $x$를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x]+1)([x]-1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

**16.** 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$과 직선 $3x + 4y - a = 0$이 서로 접할 때, $a$의 값을 구하면?

① 3 또는 20　② 3 또는 23　③ 2 또는 18

④ 2 또는 25　⑤ 4 또는 30

**해설**

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리

$d$ 가 2이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$\therefore\ |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$

따라서, $a = 3$ 또는 23

**17.** 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$을 동시에 만족하는 $x$의 값이 존재하도록 하는 정수 $a$의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$에서
$(x-5)(x+1) < 0$이므로
$-1 < x < 5$
$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$에서
$x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)$
$= (x-a)(x-a-2) < 0$이므로
$a < x < a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a + 2 > -1$
즉 $a > -3$또는 $a < 5$에서
$-3 < a < 5$
따라서 정수 $a$의 개수는 7개다.

**18.** 등식 $2x^2+x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 $x$에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 $a, b, c$를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x=2$를 대입해서 구한다.
$15=a+b+c$

**19.** 원 $x^2+y^2=k$ 와 직선 $y=-x+1$ 이 만나지 않기 위한 실수 $k$ 의 값의 범위는? (단, $k>0$)

① $0<k<\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}<k<1$ ③ $1<k<\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2}<k<2$ ⑤ $k>2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 $d$ 와 반지름의 길이 $r$ 에 대하여 $d>r$ 이어야 한다.

$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{k}$ (단, $k>0$ )

$\therefore 0<k<\frac{1}{2}$

**20.** 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \le 0 \\ x^2 - ax + b \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 \le x \le 5$ 이고,

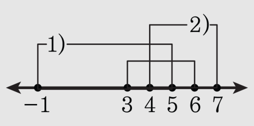
연립부등식 $\begin{cases} x^2 - ax + b \le 0 \\ x^2 - 11x + 28 \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4 \le x \le 6$ 일 때,

두 상수 $a$, $b$의 합 $a + b$의 값은?

① 15　② 27　③ 38　④ 49　⑤ 52

해설

1) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \le 0 \\ x^2 - ax + b \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 \le x \le$ 5




2) $\begin{cases} x^2 - ax + b \le 0 \\ x^2 - 11x + 28 \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4 \le$ $x \le 6$

1) 의 경우, $(x-5)(x+1) \le 0$　$\therefore -1 \le x \le 5$

2) 의 경우, $(x-7)(x-4) \le 0$　$\therefore 4 \le x \le 7$　1), 2) 와 연립하여 각각 $3 \le x \le 5$ 와 $4 \le x \le 6$ 의 해가 될 수 있도록 동시에 만족시키는 범위는 $3 \le x \le 6$ 이다.

따라서 $x^2 - ax + b = (x-3)(x-6) \le 0$ $a = 9$,　$b = 18$　$\therefore$ $a + b = 27$

**21.** 이차함수 $y = x^2 - 2x$의 그래프가 직선 $y = a$보다 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위가 $-1 < x < b$일 때, 상수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값은?

① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 9

해설

$x^2 - 2x < a$ 에서 $x^2 - 2x - a < 0 \cdots$ ㉠
한편, 해가 $-1 < x < b$이고
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-b) < 0$
$\therefore x^2 + (1-b)x - b < 0$ 이
부등식 ㉠과 일치해야 하므로
$1 - b = -2$ , $a = b$
따라서 $a = 3$, $b = 3$이므로 $ab = 9$

**22.** 두 부등식 $x^2-2x-8>0$,
$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 $a$의 범위를 $b \le a \le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① $-1$ ② $0$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

$(x-4)(x+2)>0$,
$\therefore\ x>4,\ x<-2$
$x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$
$(x-a)(x-a-1)<0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$a \ge -2,\ a+1 \le 4 \to a \le 3$
$\therefore\ -2 \le a \le 3$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

**23.** $x$에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　　② 16　　③ 32　　④ 64　　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

**24.** 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 2$ 까지의 거리와 점 $P$ 에서 $x$ 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 $a$ 의값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-9$ ③ $-\frac{4}{9}$ ④ $-3$ ⑤ $-2$

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x - 3y + 6 = 0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a + 6|}{5}$ 이고,
점$P(0,\ a)$ 와 $x$ 축간의 거리는 $y$ 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,
$|-3a + 6| = 5|a|$ , $-3a + 6 = \pm 5a$
$\therefore\ a = \frac{3}{4}$ 또는 $-3$
$\therefore\ a = -3\ \ (\because\ a < 0)$

**25.** $1 \le x \le 2$인 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$이 항상 성립할 때, 실수 $a$의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$  ② $a < 2$  ③ $a < 3$  ④ $a < 4$  ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

**26.** 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다. )

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

**27.** 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 에 직선 $y=mx$ 가 접하도록 상수 $m$ 의 값을 정할 때, 모든 $m$ 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$x^2+y^2+6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=4$
이것은 중심이 $(-3,\ 2)$,
반지름의 길이가 2 인 원이다.
이 원에 직선 $y=mx$ 가 접하므로
원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx-y=0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
$|-3m-2|=2\sqrt{m^2+1}\cdots$ ㉠
㉠의 양변을 제곱하여 정리하면
$5m^2+12m=0 \quad \therefore\ m=0,\ -\frac{12}{5}$
따라서 구하는 모든 $m$ 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

**28.** 두 부등식 $|x-1|<2$, $x^2-2ax+a^2-4 \geq 0$을 동시에 만족하는 $x$의 값의 범위가 $-1<x\leq 2$가 되도록 상수 $a$의 값을 정하면?

① 0 ② $-2$ ③ 4 ④ $-6$ ⑤ 8

해설

$|x-1|<2$의 해는 $-1<x<3$이므로
공통범위가 $-1<x\leq 2$가 되려면 $x=2$가
$x^2-2ax+a^2-4=0$의 근이어야 한다.
$\therefore 4-4a+a^2-4=0$
$\therefore a=0,\ 4$
그런데 $a=0$이면,
공통범위는 $2\leq x<3$이 되어 모순이다.
$\therefore a=4$

**29.** $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4\cdot(2x-1)^7$
$=a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$는 양변에 $x=1$을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4\cdot(2-1)^7=2^4=16$

**30.** 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 만나지 않도록 $k$ 의 값의 범위를 구하면?

① $-5<k<5$ ② $k>5,\ k<-5$ ③ $-5\le k\le 5$
④ $k\ge 5,\ k\ge -5$ ⑤ $0<k\le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$\therefore\ \dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1}}>\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ k>5$ 또는 $k<-5$

**31.** 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 $a$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

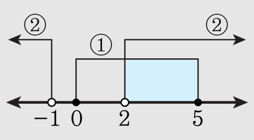
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

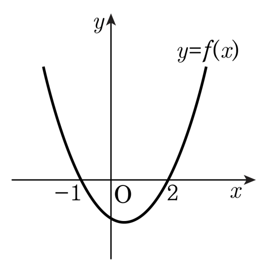
또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 $a$의 값은 2이다.



**32.** 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식
$f(x-2005) \le 0$ 의 해는?




① $1999 \le x \le 2002$

② $2000 \le x \le 2003$

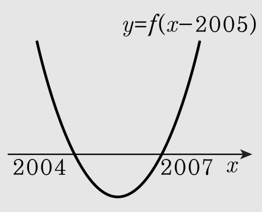
③ $2001 \le x \le 2004$

④ $2002 \le x \le 2004$

⑤ $2004 \le x \le 2007$

해설

함수 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
$y = f(x)$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로
2005만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
다음 그림과 같으므로 부등식
$y = f(x-2005) \le 0$ 의 해는
$2004 \le x \le 2007$

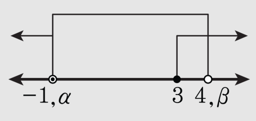


**33.** 두 부등식 $x^2 - 2x - 3 > 0$,
$x^2 + ax + b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 $x$의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 $x$의 값은 $3 < x \le 4$일 때, $a + b$의 값을 구하면?

① $-6$　　② $-7$　　③ $-8$　　④ $-9$　　⑤ $-10$

해설

$(x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow \quad x < -1$ 또는 $x > 3$
$x^2 + ax + b \le 0 \Rightarrow \alpha \le x \le \beta$ 라 하자
주어진 조건을 만족하려면




$\therefore \alpha = -1, \beta = 4$
$(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$
$a = -3, b = -4$
$\therefore a + b = -7$

**34.** 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② $-32$ ③ $-64$ ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우
$x = 1$ 을 대입한다.
$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$

**35.** 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 $a$ 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$

③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$　④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$

⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2 \cdots\cdots$ ㉠

$y=x+2 \cdots\cdots$ ㉡

에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+4(1-a)x+4=0$

$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라고 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$

㉠, ㉡이 많나지 않으려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$

$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

(다른해설) 원의 중심 $(2a,0)$ 에서

직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 $d$ 라고 하면

$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$

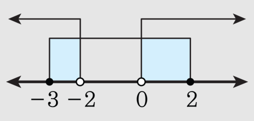
양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-1<0$　　$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

**36.** 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ x^2+ax+b>0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 \le x < -2$ 또는 $0 < x \le 2$일 때, $a, b$ 를 구하여 $a \times b$ 를 계산하면?

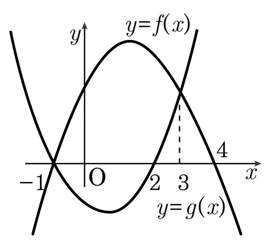
① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설




$x^2+x-6=(x+3)(x-2) \le 0$에서
$-3 \le x < 2$이므로
연립부등식의 해가 다음 그림과 같으려면 $x^2-ax+b>0$의 해는
$x<-2, x>0$이어야 한다.
$x^2+ax+b=x(x+2)=x^2+2x>0$
$\therefore a=2,\ b=0$
$\therefore a \cdot b=0$

**37.** 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해를 구하면?




① $x \leq -1$ ② $-1 \leq x \leq 2$

③ $-1 \leq x \leq 3$ ④ $2 \leq x \leq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 4$

해설

$f(x) - g(x) \leq 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이 부등식을 만족하는 $x$ 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \leq x \leq 3$

**38.** 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 $-2$뿐일 때, $a$의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. $mn$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

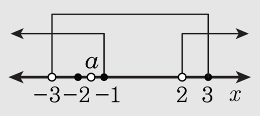
▷ 정답 : $-6$

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$




그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 $-2$뿐이려면 $-2<a\le 3$이다.

$\therefore$ $-2<a\le 3$

**39.** 모든 실수 $x$에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$　② $0$　③ $3^{2007}+1$
④ $1$　⑤ $3^{2007}+3$

**해설**

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

**40.** 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 $n$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ $n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 $n$ 은 5 이다.

**41.** 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2 \ge 2-x \end{cases}$ 의 해와 부등식 $ax^2+2bx-(a+2b) \ge 0$ 의 해가 일치할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

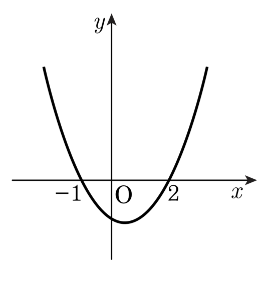
① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $0$ ⑤ $1$

해설

$\begin{cases} x^2-3x \le 0 \cdots (가) \\ x^2 \ge 2-x \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $x(x-3) \le 0 \quad \therefore 0 \le x \le 3$
(나)에서
$x^2+x-2 \ge 0, \quad (x+2)(x-1) \ge 0$
$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 1$
따라서 (가)와 (나)의 공통 범위를 구하면
$1 \le x \le 3$
해가 $1 \le x \le 3$이고 이차항의 계수가
$a(a<0)$ 인 부등식은
$a(x-1)(x-3) \ge 0$
$ax^2-4ax+3a \ge 0$
$\therefore -4a = 2b, \quad 3a = -(a+2b)$
$-4a = 2b$에서 $\quad b=-2a$
$\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2a}{a} = -2$

**42.** 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $x$ 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해는?




① $-1 < x < \frac{1}{2}$

② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$

④ $x$는 모든 실수

⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
$x$ 축과의 교점의 $x$ 좌표가 $-1,\ 2$ 이므로
$a > 0$ 이고
$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$
$\therefore\ b = -a,\ c = -2a\ (a > 0)$

이때, $cx^2 + bx + a > 0 \Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

**43.** 점 $(2,\ -3\ )$ 과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{19}{5}$ ② $\frac{14}{5}$ ③ $\frac{19}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{19}{7}$

해설

$\therefore\ d=\frac{|\,3\cdot2-4\cdot(-3)+1\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{19}{5}$