1. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,

$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로

$\therefore\ 2^5 = 32$

2. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,

$a = b^2 + 1 \cdots\cdots$ ㉠

$l = \dfrac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡

㉠를 ㉡에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{4}$이므로

$\therefore\ 4(a+b) = 7$

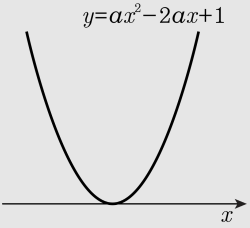
3. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

4. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x=1$ 을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x=-1$ 을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50} = 0$

5. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

6. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$ ② $-3 < a < 8$ ③ $-3 < a < 4$

④ $-2 < a < 12$ ⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{또는} x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가

존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2-a}_{(다)} \qquad \underbrace{a^2-a < 12}_{(라)}$$

(다)에서

$$a^2-a+2>0, \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

$\therefore$모든 실수

(라)에서

$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$

$\therefore -3 < a < 4$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$-3 < a < 4$

7. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a-1)^3 = 125, a-1=5$

$\therefore\ a=6$

8. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$ ④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

9. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \leq 6$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$$

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$x^2 - 6x + 8 > 0$에서

$(x-2)(x-4) > 0$

$\therefore x < 2$ 또는 $x > 4$

$x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0$에서

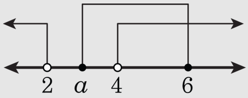
$\Rightarrow (x-a)(x-6) \leq 0$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \leq 6$ 이 되려면

$(x-a)(x-6) \leq 0$의 해가 $a \leq x \leq 6$이어야 하고,

$2 \leq a \leq 4$ 이어야 한다

$\therefore a$의 최솟값 : 2, 최댓값 : 4



10. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가

$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고

$m(x+1)(x-3) > 0$

$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$n = -2m,\ mn + 2 = -3m$

두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서

$2m^2 - 3m - 2 = 0$, $(2m+1)(m-2) = 0$

$\therefore m = -\dfrac{1}{2}\ (\because m < 0)$

따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

11. 부등식 $x^2-4x+3>0$과 $2x^2+(a-8)x-4a<0$을 동시에 만족하는 정수인 x의 값이 0뿐 일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a \le 2$ ② $0 \le a < 2$ ③ $0 < a \le 2$

④ $-1 < a \le 0$ ⑤ $-1 \le a < 0$

해설

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x>3$ 또는 $x<1 \cdots$ ①

$2x^2+(a-8)x-4a$

$=(2x+a)(x-4)<0$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$-\frac{a}{2}<4$

$\therefore\ -\frac{a}{2}<x<4 \cdots$ ②

①과 ②에 의하여 $-1 \le -\frac{a}{2} < 0$

$\therefore\ 0<a \le 2$

12. 모든 실수 x에 대하여 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 이라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$x=2$를 대입하면,

$\{2\times(2)^3\}-(3\times 2^2)-2+1=a+b+c+d$

$\therefore a+b+c+d=3$

13. 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$
② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$
③ $-1<m<1$
④ $-2<m<2$
⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2-4mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3(m^2+1)=m^2-3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$

이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서

직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

14. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \ge -1$

④ $a < -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

15. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x]+1)([x]-1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

16. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, a의 값을 구하면?

① 3 또는 20　② 3 또는 23　③ 2 또는 18

④ 2 또는 25　⑤ 4 또는 30

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리

d 가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$

따라서, $a=3$ 또는 23

17. 두 부등식 $x^2-4x-5<0$, $x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2-4x-5<0$에서

$(x-5)(x+1)<0$이므로

$-1<x<5$

$x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$에서

$x^2-2(a+1)x+a(a+2)$

$=(x-a)(x-a-2)<0$이므로

$a<x<a+2$

두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로

$a+2>-1$

즉 $a>-3$ 또는 $a<5$에서

$-3<a<5$

따라서 정수 a의 개수는 7개다.

18. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$가 x에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$를 대입해서 구한다.

$15 = a + b + c$

19. 원 $x^2+y^2=k$ 와 직선 $y=-x+1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k>0$)

① $0<k<\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}<k<1$ ③ $1<k<\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2}<k<2$ ⑤ $k>2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이 r 에 대하여 $d>r$ 이어야 한다.

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{k} \text{ (단, } k>0\text{)}$$

$\therefore 0<k<\frac{1}{2}$

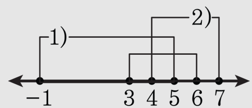
20. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-5 \le 0 \\ x^2-ax+b \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 \le x \le 5$ 이고,

연립부등식 $\begin{cases} x^2-ax+b \le 0 \\ x^2-11x+28 \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4 \le x \le 6$ 일 때,

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 15 ② 27 ③ 38 ④ 49 ⑤ 52

해설



1) $\begin{cases} x^2-4x-5 \le 0 \\ x^2-ax+b \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 \le x \le 5$

2) $\begin{cases} x^2-ax+b \le 0 \\ x^2-11x+28 \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4 \le x \le 6$

1) 의 경우, $(x-5)(x+1) \le 0$ $\quad \therefore -1 \le x \le 5$

2) 의 경우, $(x-7)(x-4) \le 0$ $\quad \therefore 4 \le x \le 7$ 1), 2) 와 연립하여 각각 $3 \le x \le 5$ 와 $4 \le x \le 6$ 의 해가 될 수 있도록 동시에 만족시키는 범위는 $3 \le x \le 6$ 이다.

따라서 $x^2-ax+b=(x-3)(x-6) \le 0$ $a=9$, $\quad b=18$ $\quad \therefore$ $a+b=27$

21. 이차함수 $y = x^2 - 2x$의 그래프가 직선 $y = a$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $-1 < x < b$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 9

해설

$x^2 - 2x < a$ 에서 $x^2 - 2x - a < 0 \cdots$ ㉠
한편, 해가 $-1 < x < b$이고
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-b) < 0$
$\therefore x^2 + (1-b)x - b < 0$ 이
부등식 ㉠과 일치해야 하므로
$1 - b = -2$, $a = b$
따라서 $a = 3$, $b = 3$이므로 $ab = 9$

22. 두 부등식 $x^2-2x-8>0$,
$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 범위를 $b \le a \le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x-4)(x+2)>0$,

$\therefore\ x>4,\ x<-2$

$x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$

$(x-a)(x-a-1)<0$

두 부등식의 공통범위가 없으려면

$a \ge -2,\ a+1 \le 4 \rightarrow a \le 3$

$\therefore\ -2 \le a \le 3$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

23. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$을 구하려면
$x = 1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

24. 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② -9 ③ $-\frac{4}{9}$ ④ -3 ⑤ -2

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x - 3y + 6 = 0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a+6|}{5}$ 이고,

점$P(0,\ a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,

$|-3a+6| = 5|a|$, $-3a + 6 = \pm 5a$

$\therefore\ a = \frac{3}{4}$ 또는 -3

$\therefore\ a = -3\ \ (\because\ a < 0)$

25. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　② $a < 2$　③ $a < 3$　④ $a < 4$　⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \leq x \leq 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

26. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$　② $-1 \le x < 1$　③ $-1 \le x < 2$

④ $0 \le x < 1$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

27. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 에 직선 $y=mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$　② -2　③ 0　④ 2　⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$x^2+y^2+6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=4$
이것은 중심이 $(-3,\ 2)$,
반지름의 길이가 2 인 원이다.
이 원에 직선 $y=mx$ 가 접하므로
원의 중심 $(-3,2)$ 와 직선 $mx-y=0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.

즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$|-3m-2|=2\sqrt{m^2+1}\cdots$ ㉠
㉠ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2+12m=0 \quad \therefore\ m=0,\ -\frac{12}{5}$

따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

28. 두 부등식 $|x-1|<2$, $x^2-2ax+a^2-4\geq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $-1<x\leq 2$가 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① 0　　② -2　　③ 4　　④ -6　　⑤ 8

해설

$|x-1|<2$의 해는 $-1<x<3$이므로
공통범위가 $-1<x\leq 2$가 되려면 $x=2$가
$x^2-2ax+a^2-4=0$의 근이어야 한다.
$\therefore 4-4a+a^2-4=0$
$\therefore a=0,\ 4$
그런데 $a=0$이면,
공통범위는 $2\leq x<3$이 되어 모순이다.
$\therefore a=4$

29. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4 \cdot (2x-1)^7$

$= a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면

계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서

$(1+2-3+2)^4 \cdot (2-1)^7 = 2^4 = 16$

30. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < k < 5$ ② $k > 5,\ k < -5$ ③ $-5 \le k \le 5$

④ $k \ge 5,\ k \ge -5$ ⑤ $0 < k \le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|k|}{\sqrt{2^2+1}} > \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \quad k > 5$ 또는 $k < -5$

31. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-5x \le 0 \\ (x+1)(x-a)>0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫 번째 부등식을 풀면 $x^2-5x=x(x-5)\le 0$

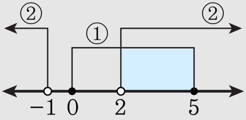
$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a>-1$ 이어야 한다.

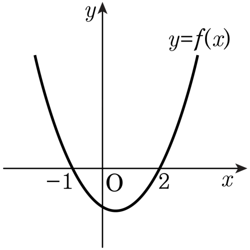
$\therefore x<-1, x>a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가

$2<x\le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



32. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-2005) \le 0$ 의 해는?



① $1999 \le x \le 2002$

② $2000 \le x \le 2003$

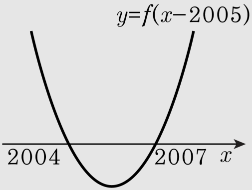
③ $2001 \le x \le 2004$

④ $2002 \le x \le 2004$

⑤ $2004 \le x \le 2007$

해설

함수 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2005만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 부등식 $y = f(x-2005) \le 0$ 의 해는 $2004 \le x \le 2007$

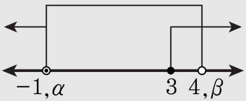


33. 두 부등식 $x^2-2x-3>0$,
$x^2+ax+b\le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 4$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

해설

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow \quad x<-1$ 또는 $x>3$
$x^2+ax+b\le 0 \Rightarrow \alpha\le x\le\beta$ 라 하자
주어진 조건을 만족하려면



$\therefore \alpha=-1,\beta=4$
$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$
$a=-3, b=-4$
$\therefore a+b=-7$

34. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우
$x = 1$을 대입한다.
$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$

35. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　　② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$

③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$　　④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$

⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2 \cdots\cdots$ ㉠

$y=x+2 \cdots\cdots$ ㉡

에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+4(1-a)x+4=0$

$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$

㉠, ㉡이 많나지 않으려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$

$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서

직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$

양변을 제곱하여 정리하면

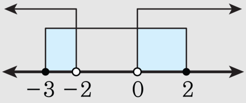
$a^2-2a-1<0 \qquad \therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

36. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 + x - 6 \le 0 \\ x^2 + ax + b > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 \le x < -2$ 또는 $0 < x \le 2$ 일 때, a, b 를 구하여 $a \times b$ 를 계산하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

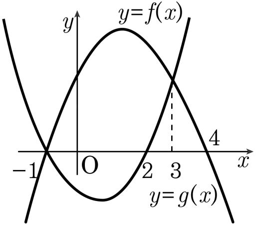
해설

$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \le 0$ 에서
$-3 \le x < 2$ 이므로
연립부등식의 해가 다음 그림과 같으려면 $x^2 - ax + b > 0$ 의 해는
$x < -2, x > 0$ 이어야 한다.



$x^2 + ax + b = x(x+2) = x^2 + 2x > 0$
$\therefore a = 2,\ b = 0$
$\therefore a \cdot b = 0$

37. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해를 구하면?



① $x \leq -1$ ② $-1 \leq x \leq 2$

③ $-1 \leq x \leq 3$ ④ $2 \leq x \leq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 4$

해설

$f(x) - g(x) \leq 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \leq x \leq 3$

38. 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

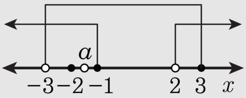
▷ 정답 : -6

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 -2뿐이려면 $-2<a\le 3$이다.

$\therefore\ -2<a\le 3$

39. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$

④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

40. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

41. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ x^2 \ge 2 - x \end{cases}$ 의 해와 부등식 $ax^2 + 2bx - (a + 2b) \ge 0$ 의 해가 일치할 때, $\dfrac{b}{a}$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \cdots (\text{가}) \\ x^2 \ge 2 - x \cdots (\text{나}) \end{cases}$$

(가) 에서 $x(x-3) \le 0 \quad \therefore 0 \le x \le 3$

(나) 에서

$x^2 + x - 2 \ge 0, \quad (x+2)(x-1) \ge 0$

$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 1$

따라서 (가) 와 (나) 의 공통 범위를 구하면

$1 \le x \le 3$

해가 $1 \le x \le 3$ 이고 이차항의 계수가

$a(a < 0)$ 인 부등식은

$a(x-1)(x-3) \ge 0$

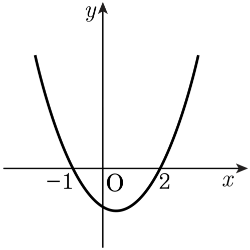
$ax^2 - 4ax + 3a \ge 0$

$\therefore -4a = 2b, \quad 3a = -(a + 2b)$

$-4a = 2b$에서 $\quad b = -2a$

$$\frac{b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$$

42. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, x 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해는?



① $-1 < x < \frac{1}{2}$

② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$

④ x는 모든 실수

⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
x 축과의 교점의 x 좌표가 $-1,\ 2$ 이므로
$a > 0$ 이고
$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$
$\therefore\ b = -a,\ c = -2a\ (a > 0)$

$$\begin{aligned} \text{이때, } cx^2 + bx + a > 0 &\Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

43. 점 $(2, -3)$과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{19}{5}$ ② $\frac{14}{5}$ ③ $\frac{19}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{19}{7}$

해설

$$\therefore\ d=\frac{|\,3\cdot 2-4\cdot(-3)+1\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{19}{5}$$