1. <보기> 의 집합의 포함 관계 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\varnothing \subset \varnothing$

㉡ $A \subset \varnothing$이면 $A = \varnothing$

㉢ $A \subset B$이고 $C \subset B$이면 $A = C$

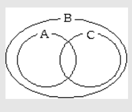
㉣ $A \not\subset B$이고 $B \not\subset C$이면 $A \not\subset C$

㉤ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset D$이면 $A \subset D$

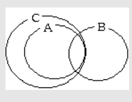
① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉣ ③ ㉠, ㉡, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\varnothing \subset \varnothing$ 는 옳다. (참)
㉡ $\varnothing \subset A$ 이므로 $A \subset \varnothing$ 이면 $A = \varnothing$ 이다. (참)
㉢ 먼저 B 를 그린 다음, $A \subset B$이고 $C \subset B$ 이도록 A 와 C 를 그렸을 때 항상 $A = C$ 인지 알아보면 그림1에서 그렇지 않음을 알 수 있다. (거짓)



㉣ 먼저 B 를 그린 다음, $A \not\subset B$이고 $B \not\subset C$ 이도록 A 와 C 를 그렸을 때 항상 $A \not\subset C$ 인지 알아보면 다음 그림에서 그렇기 않음을 알 수 있다. (거짓)



㉤ 조건에서 $A \subset B, B \subset C$ 이므로 $A \subset C$ 이고 조건에서 $C \subset D$ 이므로 $A \subset D$ 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉤이다.

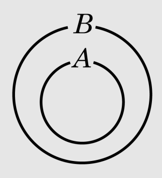
2. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

① $A \cap B = \varnothing$　　② $A \cup B = A$　　③ $A \subset B$

④ $A - B = \varnothing$　　⑤ $B \cap A^c = \varnothing$

해설

두 집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 이면 $A \subset B$ 이고, 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



① $A \cap B = A$

② $A \cup B = B$

⑤ $B \cap A^c \neq \varnothing$

3. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 A, B에 대하여 $A = \{3, 4\}$ 일 때, $(A^c \cup B) \cap A = \{3\}$을 만족시키는 집합$B$ 의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$(A^c \cup B) \cap A = (A^c \cap A) \cup (B \cap A) = B \cap A$, $B \cap A = \{3\}$ 이므로 집합 B 는 3을 포함하고 4를 포함하지 않는 U 의 부분집합이다.
따라서 $\{0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^3 = 8$ (개)

4. 35명의 학생이 영어와 수학 중 적어도 한 과목을 신청해야 한다. 영어를 신청한 학생이 25명, 수학을 신청한 학생이 28명일 때, 수학만 신청한 학생수를 구하면?

① 7명 ② 8명 ③ 9명 ④ 10명 ⑤ 11명

해설

영어를 신청한 학생의 집합을 A, 수학을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$\Rightarrow n(A \cup B) = n(U) = 35$

$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 18$

$\therefore$ (수학만 신청한 학생수)$= 28 - 18 = 10$

5. 전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 한다. $\sim p \to \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　② $P \cap Q = \phi$　③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \to \sim q \Rightarrow P^c \subset Q^c \Rightarrow Q \subset P$

6. 전체집합을 $U=\{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2>1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x+y \le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2+2x \ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2-y^2>1$이다.

⑤ $x^2+x<x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x=0$ 일 때 $x^2=0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x=y=1$ 일 때 $x+y=2 \ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2-y^2 \le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2+x \ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

7. 두 조건 $p : |x-2| \leq h$, $q : |x+1| \leq 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \geq 0$)

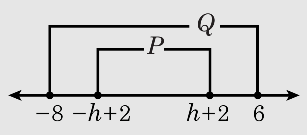
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \leq x \leq 2+h$

q : $-8 \leq x \leq 6$



$-h+2 \geq -8 \leftrightarrow h \leq 10$, $h+2 \leq 6 \leftrightarrow h \leq 4$

$\therefore h \leq 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

8. 다음 명제 중 그 대우가 참인 것을 모두 고르면?

① 마름모이면 정사각형이다.

② $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

③ $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다

④ $ab = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.

⑤ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - 1 = 0$ 이다.

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이므로 참인 명제를 고르면 된다.

① (반례) □ABCD 에서 네 변의 길이가 같고 $\angle A = \angle C = 100°$, $\angle B = \angle D = 80°$ 일 때, □ABCD 는 마름모이지만 정사각형이 아니므로 거짓이다.

② (반례) $a = -3, b = 1$ 일 때, $a < b$ 이지만 $|a| > |b|$ 이므로 거짓이다.

④ (반례) $a = 0, b = 1$ 일 때, $ab = 0$ 이지만 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 거짓이다.

9. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 보기 중 함수 $f : X \to X$로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x$　　㉡ $f(x) = x^2$　　㉢ $f(x) = |x|$

㉣ $f(x) = \frac{1}{x}$　　㉤ $f(x) = \sqrt{x}$

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = -1 \in X$
따라서 함수이다.
㉡ $f(x) = x^2$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉢ $f(x) = |x|$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉣ $f(x) = \frac{1}{x}$에서 $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.
㉤ $f(x) = \sqrt{x}$에서 $f(-1) = i \notin X$이므로 함수가 아니다.
따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

10. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y,\ f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고
$f(-1) = -a + b,\ f(4) = 4a + b$ 이므로
치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.
그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로
$-a + b = -5,\ 4a + b = 10$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 3,\ b = -2$
$\therefore 2a + b = 4$

11. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$	㉡ $g(x) = x^2 + x$
㉢ $h(x) = \|x\| - 2$	㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응
㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.
㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.
그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

12. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

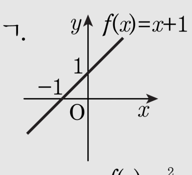
㉠ $f(x) = x + 1$ ㉡ $f(x) = 1$

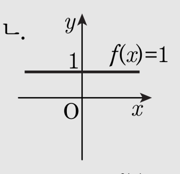
㉢ $f(x) = x^3$ ㉣ $f(x) =| x + 1 |$

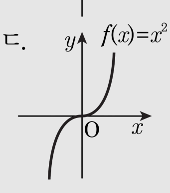
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

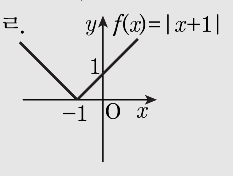
해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


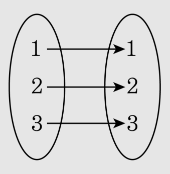
따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

13. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대해 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수의 개수를 a, 상수함수의 개수를 b 라 할 때, $a + b$ 는 얼마인가?

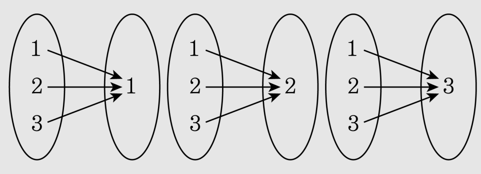
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

항등함수는 $1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3$ 의 한 가지가 있고,



상수함수의 경우는$(1, 2, 3) \to 1, (1, 2, 3) \to 2, (1, 2, 3) \to 3$ 의 3 가지가 있다.



$\therefore a + b = 4$

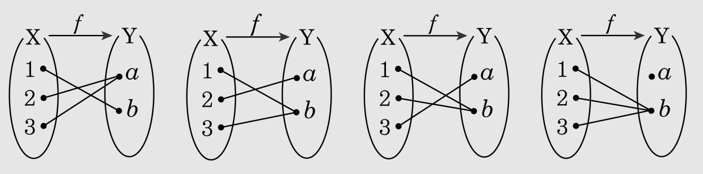
14. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

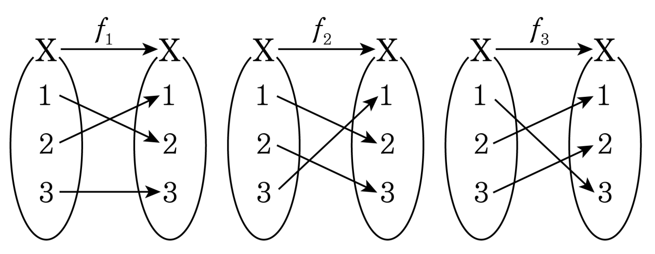
▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



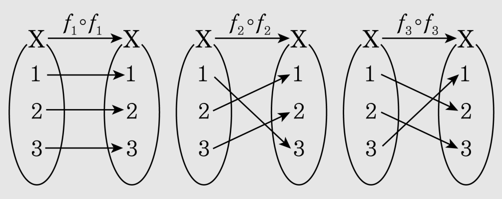
15. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 X로의 일대일대응 $f_1,\ f_2,\ f_3$가 다음과 같다. 이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$와 같은 것은?



① f_1　　② f_2　　③ f_3
④ $f_1 \circ f_1$　　⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면



위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

16. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 모두 구하여 원소나열법으로 나타내어라.

㉠ 모든 원소는 20 이하의 자연수이다.
㉡ $2 \in A$, $3 \in A$
㉢ $a \in A$, $b \in A$ 이면 $a \times b \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$

해설

$2 \in A$, $3 \in A$ 이고, 모든 원소는 20 이하의 자연수이므로
$2 \times 2 = 4 \in A$, $2 \times 3 = 6 \in A$
$3 \times 3 = 9 \in A$, $3 \times 4 = 12 \in A$, $3 \times 6 = 18 \in A$
$4 \times 2 = 8 \in A$, $4 \times 4 = 16 \in A$

17. 집합 $A = \{\varnothing,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \{1,\ 3,\ 5\}\}$, $B = \{\varnothing,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \{1,\ 3,\ 5\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.

㉠ $\varnothing \notin A$	㉡ $7 \subset B$
㉢ $\{1,\ 3,\ 5\} \subset B$	㉣ $\{\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\} \in A$
㉤ $A \subset B$	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 이고, $\varnothing \notin \varnothing$, $\varnothing \subset \varnothing$ 이다.
㉡ $7 \in B$
㉣ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\} \subset A$
㉤ $B \subset A$

18. 다음 중에서 옳은 것의 기호를 찾아서, 각 기호에 주어진 글자를 이용하여 단어를 만들어라.

㉠ $\{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$ 이므로 부분집합이 아니다.

㉡ $\{1, 5, 3\} = \{5, 3, 1\}$

㉢ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} $\not\subset$ {ㄱ, ㄴ, ㄷ}

㉣ $A = \{7, 8\}$ 일 때, $\varnothing \subset A$ 이다.

㉤ {ㄱ, ㄴ} $\not\subset$ {ㄱ, ㄴ, ㄷ}

㉥ $\varnothing$ 은 $\{e, f\}$ 의 부분집합이 아니다.

㉦ $\{a, b\}$ 의 부분집합은 $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 뿐이다.

㉧ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 의 부분집합은 7개이다.

㉨ $\{m, n\}$ 은 $\{m, n\}$ 의 부분집합이다.

㉠	㉡	㉢	㉣	㉤	㉥	㉦	㉧	㉨
천	축	국	하	후	행	복	합	해

▶ 답：

▷ 정답： 축하해

해설

㉠ $\{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$ 이므로 부분집합이다.
㉡ $\{1, 3, 5\} = \{1, 5, 5\} = \{5, 3, 1\}$ 이다.
㉢ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} $\not\subset$ {ㄱ, ㄴ, ㄷ}
㉣ $\varnothing$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤ {ㄱ, ㄴ} $\subset$ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 이다.
㉥ $\varnothing$ 은 $\{e, f\}$ 의 부분집합이다.
㉦ $\{a, b\}$ 의 부분집합에서 $\varnothing$ 이 빠졌다.
㉧ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 의 부분집합은 8개이다.
㉨ $\{m, n\} \subset \{m, n\}$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣, ㉨이다.

19. 집합 $A = \{x \mid 2 \le x < a$인 자연수$\}$에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 16 개가 되기 위한 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$2^{n(A)} = 16 = 2^4 \qquad \therefore\ n(A) = 4$

$A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{x \mid 2 \le x < 6$인 자연수$\}$

$\therefore\ a = 6$

20. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $(A-B)\cup X=X$, $(A\cup B)\cap X=X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A=\{x \mid x$는 8 의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 5 이하의 홀수$\}$

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$
$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$
$\{2,\ 4,\ 8\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$
집합 X는 $A\cup B$의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
$\therefore\ 2^{6-3}=2^3=8$(개)

21. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2>$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참　　② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참　　④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

22. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{3}$　② $9,\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{3}}$　③ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{3}$
④ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 $(\sqrt{3})$ 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

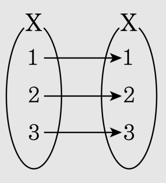
$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

23. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$
즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



24. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} (x\text{는 짝수}) \end{cases}$ 로 정의할 때, $f(f(x)) = 2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$에서 $f(x) = a$로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a가 홀수일 때 $f(a) = a+1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a가 짝수일 때 $f(a) = \dfrac{a}{2} = 2 \ \therefore a = 4$

i), ii) 에서 $f(x) = 1 \ or \ f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고

x가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$일 때 x가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, \ 3, \ 8$

$\therefore 2+3+8 = 13$