

1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 2 > 1 \\ -2x + 1 < -x - 4 \end{cases}$ 를 풀면?

① $x < -5$

② $x > -5$

③ $x < -1$

④ $x > 1$

⑤ $x > 5$

해설

$$\begin{cases} 3x - 2 > 1 \\ -2x + 1 < -x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$\therefore x > 5$$

3. 두 점 A(1), B(5)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3 + 1} = 4$$

$$\therefore P(4)$$

$$\frac{3 \times 5 - 1 \times 1}{3 - 1} = 7$$

$$\therefore Q(7)$$

$$\therefore \overline{PQ} = |7 - 4| = 3$$

4. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0, m + n = -3$$

$$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2, m - n = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1, n = -2$

$$\therefore mn = 2$$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $-2x + 1$

② $-2x - 1$

③ $-2x + 3$

④ $-2x + 5$

⑤ $-2x + 7$

해설

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 라 하면,

$f(1) = 3, f(2) = 1$ 이므로

$f(1) = a + b = 3, f(2) = 2a + b = 1$ 연립하면

$a = -2, b = 5$

$\therefore$ 나머지는 $-2x + 5$ 이다.

6. 다항식 $(x+2)f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지가 -3 이다. 이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

㉠ $-4x + 7$

㉡ $-4x - 3$

㉢ $2x + 3$

㉣ $2x - 3$

㉤ $3x - 1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1) = 9 \text{ 이므로 } f(1) = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$(2x-3)f(3x-7)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$3f(2) = -3 \text{ 이므로 } f(2) = -1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 에 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 대입하면

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

이므로 $a = -4, b = 7$

7. x 가 실수일 때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a < 0$

㉡ $4a + b = 0$

㉢ $4a - c = -3$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3을 갖는 이차함수는

$y = a(x - 2)^2 + 3 (a < 0)$ 이다.

$ax^2 + bx + c = a(x - 2)^2 + 3$ 이므로

$b = -4a, c = 4a + 3$ 이다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} x + a \leq 3 \\ 3x - 1 \geq 2x + b \end{cases}$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, ab 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

주어진 식을 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 3 - a \\ x \geq b + 1 \end{cases}$$

$$b + 1 \leq x \leq 3 - a$$

$$b + 1 = -1, 3 - a = 2$$

$$\therefore b = -2, a = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times (-2) = -2$$

9. 일차부등식 $|x + 1| + |x - 3| < 6$ 을 만족하는 x 의 최대 정수의 값은?

① 6

② 5

③ 3

④ 4

⑤ 2

해설

i) $x < -1$ 일 때 $-(x + 1) - (x - 3) < 6$, $-2x < 4 \therefore x > -2$

공통부분은 $-2 < x < -1$

ii) $-1 \leq x \leq 3$ 일 때 $x + 1 - (x - 3) < 6 \therefore 4 < 6$

$-1 \leq x \leq 3$ 은 성립

iii) $x \geq 3$ 일 때 $x + 1 + x - 3 < 6$, $2x < 8 \therefore x < 4$

공통부분은 $3 \leq x < 4$

세 경우를 합하면 $-2 < x < 4$

$\therefore x$ 의 최대정수 : 3

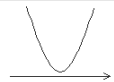
10. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + 1 > 0$ 이 성립할 때, 실수 k 값의 범위가 $m \leq k < n$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+n=5$

해설

① $k=2$ 일 때 $1 > 0 \therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2) > 0, k > 2$

③ $\frac{D}{4} < 0$ 에서 $(k-2)^2 - (k-2) < 0$

$(k-2)(k-3) < 0, 2 < k < 3$

①을 만족하거나 ②와 ③을 동시에 만족해야 하므로 $2 \leq k < 3$

$\therefore m=2, n=3, m+n=5$

11. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \quad \text{을 만족하는 정수 } x \text{의 개수를 구하면?}$$

① 5개

② 4개

③ 3개

④ 2개

⑤ 1개

해설

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

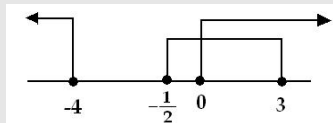
$$(x - 3)(2x + 1) \leq 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

$$x^2 + 4x \geq 0$$

$$x(x + 4) \geq 0$$

$$x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 0$$



해 : $0 \leq x \leq 3$ $x = 0, 1, 2, 3 \Leftarrow$ 정수해

12. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \leq 6$ 이 되도록 실수 a 의 값의 범위를 정할 때, a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$$

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$x^2 - 6x + 8 > 0 \text{에서}$$

$$(x - 2)(x - 4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4$$

$$x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \text{에서}$$

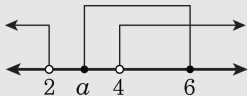
$$\Rightarrow (x - a)(x - 6) \leq 0$$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \leq 6$ 이 되려면

$(x - a)(x - 6) \leq 0$ 의 해가 $a \leq x \leq 6$ 이어야 하고,

$2 \leq a \leq 4$ 이어야 한다

$\therefore a$ 의 최솟값 : 2, 최댓값 : 4



13. 좌표평면 위의 점 $A(1, 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $3 : 2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4, 1)$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $B(a, b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{3a-2}{3-2}, \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4, 1)$ 이므로

$$3a - 2 = 4 \quad \therefore a = 2,$$

$$3b - 8 = 1 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore B(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

14. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1}\right) = (2, 4)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 0}{2 - 1}, \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1}\right) = (4, 12) \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ 이다.}$$

15. $x+ay+1=0$ 이 $2x-by+1=0$ 과는 수직이고 직선 $x-(b-3)y-1=0$ 과는 평행일 때, a^2+b^2 의 값은 ?

① 5

② 7

③ 10

④ 13

⑤ 15

해설

$$x+ay+1=0 \quad \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$2x-by+1=0 \quad \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$x-(b-3)y-1=0 \quad \cdots \textcircled{\text{E}}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$ 은 수직이므로,

$$1 \times 2 + a(-b) = 0 \quad \therefore ab = 2$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{E}}$ 은 평행이므로 $a = -(b-3)$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5$$

16. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$
- ② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$
- ③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$
- ④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$
- ⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로

$y = 2x + b \dots\dots\dots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.

이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$ 이므로

중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.

따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,

즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$$|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면

$$x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$$

$$5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5(b^2 + 6b - 10) = 0$$

$$b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15 \text{ 이것을 ㉠에 대입하면}$$

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

17. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$

② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$

③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$

④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$

⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설

구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
 $y + 2 = m(x - 1)$

$$\therefore mx - y - m - 2 = 0$$

이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1,$$

$$|m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$$

$$\therefore m = -\frac{3}{4}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

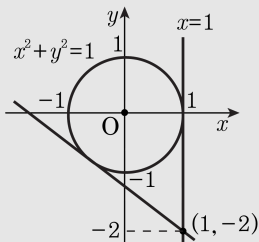
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도

점 $(1, -2)$ 를 지나고

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.

그러므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ 또는 } x = 1$$



18. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

19. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{5}{4}$

③ 3

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ -8

해설

x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x - 2) + 4(y + 3) - 5 = 0$ 으로 이동한다.

이 직선의 y 절편은 $x = 0$ 을 대입하면 $y = -\frac{1}{4}$

20. x, y, z 가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$ 을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z 가 빗변인 직각삼각형

② x 가 빗변인 직각삼각형

③ $x = y$ 인 이등변삼각형

④ $y = z$ 인 이등변삼각형

⑤ $z = x$ 인 이등변삼각형

해설

$$xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$$

$$(x - y)z^2 + (x^2 - y^2)z + (x - y)xy = 0$$

$$(x - y)\{z^2 + (x + y)z + xy\} = 0$$

$$(x - y)(z + x)(z + y) = 0. \therefore x = y \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수})$$

$\therefore x = y$ 인 이등변삼각형

21. a, b, c 는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$ 이라 할 때, x 의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근
 ③ 양의 중근 ④ 음의 중근
 ⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$$

$$= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots \textcircled{㉠} (\because b \neq 0)$$

$a > 0, ac > b^2 > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = ac - b^2 > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(\text{두 근의 합}) = a + c > 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

22. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$ 의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$

② $2 \leq m < 3$

③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \leq 3$

⑤ $3 < m \leq 4$

해설

두 근을 α, β 라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \quad \frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$$

$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m-2)(m+1) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1, m \geq 2$$

$$(ii) \quad \alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore m > 1$$

$$(iii) \quad \alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore m < 3$$

$$\therefore (i), (ii), (iii) \text{의 공통범위는 } 2 \leq m < 3$$

23. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1 < 2x+y < 1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y = (\text{㉠})$ 이 된다.

$-1 < 2x+y < 1$ 를 풀 때 y 대신 $y = (\text{㉠})$ 를 대입하면 $-1 < -x-1 < 1$ 이 된다.

부등식을 풀면 $-2 < x < 0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.

x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y = (\text{㉢})$ 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$$2(x+2y)+1=-x+3y$$

$$2x+4y+1=-x+3y$$

$$4y-3y=-x-2x-1$$

$$y=-3x-1$$

$-1 < 2x+y < 1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$$-1 < 2x+(-3x-1) < 1$$

$$-1 < -x-1 < 1$$

$$0 < -x < 2$$

$$-2 < x < 0$$

정수인 x 는 -1 이 된다.

x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

24. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 최댓값은?

① 4

② 5

③ 6

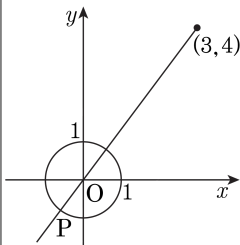
④ $1 + \sqrt{5}$

⑤ $2(1 + \sqrt{5})$

해설

$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 은 두 점 (a, b) , $(3, 4)$ 사이의 거리이고 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 값이 최대인 경우는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때이다. 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 의 거리는 5 이므로 최댓값은 $5 + 1 = 6$



25. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m^2-1) = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하면? (단, m 은 실수이다.)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (m+1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0, 3m^2 - 2m - 5 \leq 0, (3m-5)(m+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -(m+1), \alpha\beta = m^2 - 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \{-(m+1)\}^2 - 2(m^2 - 1)$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m = -1$ 일 때)