1. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면
$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$
$\therefore\ a + b + c + d = 3$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\} + c] + d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
1 & 2 & -3 & -1 & 1 & & \\
 & & 2 & -1 & -2 & & \\
\hline
1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-1} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & 2 & 1 & & & \\
\hline
1 & 2 & 1 & \boxed{-1} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & 2 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a + b + c + d = 3$

2. x에 대한 두 부등식 $x^2+(a-1)x<a$, $6x^2-x-1>0$을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \le a < -3,\ 2 < a \le 3$　② $-3 \le a < -2,\ 3 < a \le 4$
③ $-2 \le a < -1,\ 4 < a \le 5$　④ $-4 < a \le -3,\ 2 \le a < 3$
⑤ $-3 < a \le -2,\ 3 \le a < 4$

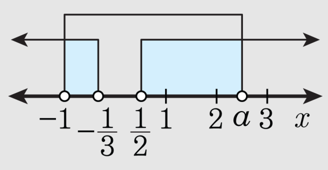
해설

$6x^2-x-1=(2x-1)(3x+1)>0$

$\Leftrightarrow\ x>\frac{1}{2}$ 또는 $x<-\frac{1}{3}\cdots\cdots$㉠

$x^2+(1-a)x-a=(x+1)(x-a)<0$

(i) $a>-1$이면 $-1<x<a\ \ \cdots\cdots$㉡

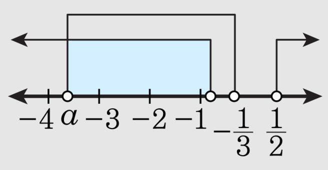


㉠과 ㉡의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)

$2<a\le 3$

(ii) $a=-1$이면 해가 없다.

(iii) $a<-1$이면 $a<x<-1\ \ \cdots\cdots$㉢



㉠, ㉢의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면(즉, 정수 -3과 -2)

$\therefore\ \ -4\le a<-3$

(i),(ii)(iii)에서 $-4\le a<-3$, $2<a\le 3$

3. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

4. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$
③ $-2 < m < 2$
④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0$, $\quad m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

5. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

(ⅰ) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ⅱ) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

6. 두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설
두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선은
$y+1=\dfrac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$
$\therefore 2x-y-5=0$
원점에서 이 직선까지의 거리는
$\dfrac{|2\times 0-0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

7. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \ge a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$ ② $-2 \le a \le 2$ ③ $0 \le a \le 4$
④ $2 \le a \le 4$ ⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \;\Rightarrow\; (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore\; 2 \le a \le 4$

8. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$에 접하는 원의 넓이는?

① 4π　　② 6π　　③ 8π　　④ 9π　　⑤ 12π

해설

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

9. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

ⅰ) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$
ⅱ) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.
$x = 1$ 을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots$ ①
$x = -1$ 을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots$ ②
① + ②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$
$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$
$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

10. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x의 범위가 $1 < x \le 2$일 때, k의 범위는?

① $k > -1$ ② $k > 0$ ③ $k < -1$

④ $k < 1$ ⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \le 0$ 에서

$(x+1)(x-2) \le 0 \quad \therefore -1 \le x \le 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0$ 에서

$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \cdots\cdots$ ㉡

i) $k + 2 < 1$ 이면

㉡의 해는 $k + 2 < x < 1$ 가 되므로

㉠, ㉡ 의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k + 2 > 1$ 이면

㉡의 해는 $1 < x < k + 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 되려면

$k + 2 > 2 \quad \therefore k > 0$

11. 이차함수 $y=6x^2+ax+b$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

해설

이차부등식 $6x^2+ax+b<0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$

이므로 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$는 이차방정식 $6x^2+ax+b=0$의

두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=-\frac{a}{6}$에서 $a=-17$

$\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{b}{6}$에서 $b=5$

$\therefore\ a+b=-12$

12. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로
$r = \frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

13. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0$, $x(2x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0$, $(x + 1)(2x - 3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

14. 두 직선 $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점과 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점은 $(2,1)$

$\therefore$ $4x+3y-1=0$ 까지의 거리 :

$\dfrac{|4\times2+3\times1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

15. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ ⋯⋯ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

16. 중심이 C$(1,\ 2)$이고, 직선 L : $x+2y=0$에 접하는 원의 반지름을 r이라 할 때 r^2은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

17. $x^3+2x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a+b+c+d$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+8-2+1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=15$

해설

(i) a,b,c,d의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ii) 조립제법 : 좌변을 $x-1$로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d,c,b가 되고 마지막 몫의 계수가 a이다.

18. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$　　㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
㉡주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

19. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2-6x+1\le 0$ ② $x^2-2x-3<0$

③ $x^2-x+1>0$ ④ $x^2-6x+9>0$

⑤ $4x^2-4x+1<0$

해설

① $(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2})\le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow -1<x<3$

③ $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0 \Rightarrow x\ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다

20. 직선 $3x+4y+k=0$이 원 $x^2+y^2=4$와 서로 만나지 않을 때, 실수 k 값의 범위는?

① $k=-10$
② $k=10$
③ $-10<k<10$
④ $k<-10$ 또는 $k>10$
⑤ $k>10$

해설

직선 $3x+4y+k=0$에서 원의 중심 $(0,\ 0)$까지의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|k|}{5}$이다.

원과 직선이 만나지 않을 때, $d>r$이므로

$\frac{|k|}{5}>2$

$\therefore\ k<-10$ 또는 $k>10$

21. 방정식 $x^2-[x]-4=0\ (0<x<4)$의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2-[x]-4=0$에서
(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로
$x^2-4=0, (x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로
$x^2-5=0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$
그런데 $1\le x<2$이므로 해가 없다.
(iii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로
$x^2-6=0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$
$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$
그런데 $2\le x<3$이므로 $x=\sqrt{6}$
(iv) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로
$x^2-7=0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$
$\therefore x=-\sqrt{7}$ 또는 $x=\sqrt{7}$
그런데 $3\le x<4$이므로 해가 없다.
따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

22. 점 $P(1,2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 점 H 의 좌표는?

① $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$　② $(2,1)$　③ $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$
④ $(1,2)$　⑤ $(2,2)$

해설

$H=(a,b)$ 라 하면, $\overline{PH}$ 는 $y=-2x+3$ 에 수직하고 H 는 직선 위에 있다.

i) $\dfrac{b-2}{a-1}=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a-2b=-3$

ii) $b=-2a+3$

i), ii) 를 연립하면, $a=\dfrac{3}{5} \quad b=\dfrac{9}{5}$

$\therefore \quad \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

23. 부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되어야하므로

$0 \le x \le 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \le x \le 2$ 에서

$f(x) \le 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서

$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

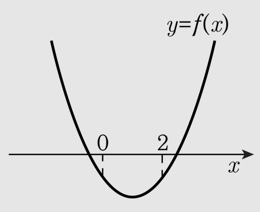
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서

$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$



24. 원 $x^2+y^2-2x-1=0$ 와 같은 중심을 가지고 $x+y+1=0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 3π ⑤ 4π

해설

$x^2+y^2-2x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=2$

따라서 구하는 원의 중심 : $(1,\ 0)$

반지름은 중심에서 $x+y+1=0$까지의 거리이므로

$\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 넓이 : 2π

25. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \leq x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$　② $\sqrt{2} + 1$　③ $\sqrt{3} + 2$
④ $\sqrt{3} - 1$　⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(i) $0 \leq x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로
$-4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)
(ii) $1 \leq x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$4x^2 - 4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
$1 \leq x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2} + 1$

26. 두 부등식 $x < -1,\ x > 2$, $2x^2 + (5+2a)x + 5a < 0$을 동시에 만족하는 정수 x의 값이 $x = -2$뿐일 때, 실수 a의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

① -3　　② -2　　③ 1　　④ 2　　⑤ -5

해설

$2x^2 + (5+2a)x + 5a = (2x+5)(x+a) < 0$

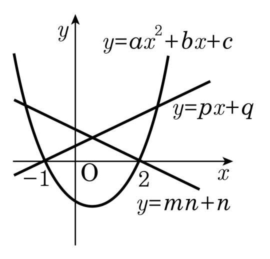
$-\frac{5}{2} < x < -a \left(\because\ a < \frac{5}{2}\right)$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$뿐이므로 $-2 < -a \leq 3$

$\therefore\ -3 \leq a < 2$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 -3

27. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 두 직선 $y = px + q$, $y = mx + n$ 이 x축 위의 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ 에서 만나고 있다. 이 때, 다음 연립부등식의 해는?



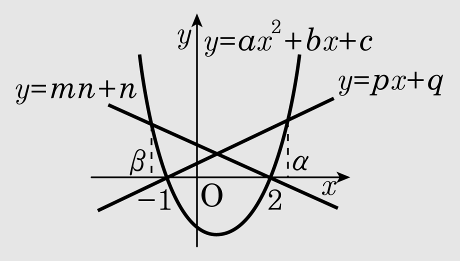
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$

① $-1 < x < 3$　② $0 < x < 2$　③ $0 < x < 3$

④ $-1 < x < 2$　⑤ $-2 < x < 3$

해설

주어진 연립부등식의 해는 포물선이 두 직선 보다 모두 아래에 있는 부분이다.



$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q & \cdots ㉠ \\ ax^2 + bx + c < mx + n & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ 식의 근 $-1 < x < \alpha$ $(\alpha > 2)$ $\cdots$ (i)

㉡ 식의 근 $\beta < x < 2$ $(\beta < -1)$ $\cdots$ (ii)

(i), (ii) 을 동시에 만족하는 x 의 범위는 $-1 < x < 2$

28. 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 접할 때, k 의 값 또는 그 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=\pm5$

해설

원 $x^2+y^2=5$ 에서 중심의 좌표는 $(0,0)$, 반지름의 길이 $r=\sqrt{5}$ 이다. 한편, 원의 중심에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리를 d 라 하면, $d=\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ 이므로 접할 조건은 $d=r$

따라서, $\dfrac{|-k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\quad\therefore\ k=\pm5$

29. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1개이다.

30. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$
② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$
③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$
④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$
⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5\left(b^2 - 4\right) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

31. 두 부등식 $-x^2-3x+4 \le 0$,
$x^2+ax+b<0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $1 \le x < 3$일 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 를 구하면?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$-x^2-3x+4 \le 0$, $x^2+3x-4 \ge 0$
$\Rightarrow x \le -4$ 또는 $x \ge 1$
$\therefore\ a=1,\ b=-12 \Rightarrow a+b=-11$

32. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$
원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로
$d = \dfrac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$
$\therefore\ |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$
따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로
모든 a 값들의 합은 26