

1. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① -3

② -1

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

계수의 합 $a + b + c + d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면

$$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	-3	-1	1	
		2	-1	-2	
1	2	-1	-2	-1	← d
		2	1		
1	2	1	-1		← c
		2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

2. x 에 대한 두 부등식 $x^2 + (a-1)x < a$, $6x^2 - x - 1 > 0$ 을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-4 \leq a < -3$, $2 < a \leq 3$ ② $-3 \leq a < -2$, $3 < a \leq 4$
 ③ $-2 \leq a < -1$, $4 < a \leq 5$ ④ $-4 < a \leq -3$, $2 \leq a < 3$
 ⑤ $-3 < a \leq -2$, $3 \leq a < 4$

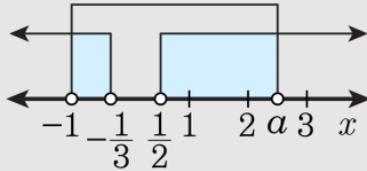
해설

$$6x^2 - x - 1 = (2x - 1)(3x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ 또는 } x < -\frac{1}{3} \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$$x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a) < 0$$

(i) $a > -1$ 이면 $-1 < x < a \dots\dots \textcircled{\text{L}}$

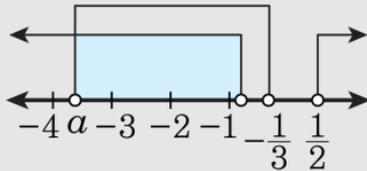


$\textcircled{\Gamma}$ 과 $\textcircled{\text{L}}$ 의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)

$$2 < a \leq 3$$

(ii) $a = -1$ 이면 해가 없다.

(iii) $a < -1$ 이면 $a < x < -1 \dots\dots \textcircled{\text{E}}$



$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{E}}$ 의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 -3과 -2)

$$\therefore -4 \leq a < -3$$

(i), (ii), (iii)에서 $-4 \leq a < -3$, $2 < a \leq 3$

3. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

4. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$

④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$$

$$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$$

5. $1 < x < 3$ 인 x 에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$ 의 해를 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2

② $1 + \sqrt{2}$

③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$

준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 만족하는 해가 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$

준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 만족하는 해는

$x = 1 + \sqrt{3}$

6. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore 2x - y - 5 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

7. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \geq a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $-2 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 4$

④ $2 \leq a \leq 4$

⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$$

$$a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq a \leq 4$$

8. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π

② 6π

③ 8π

④ 9π

⑤ 12π

해설

점 $(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

9. x 에 대한 항등식 $(1 + 2x - x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$

ii) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } (-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$$

$$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 2(\because a_0 = 1)$$

10. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x 의 범위가 $1 < x \leq 2$ 일 때, k 의 범위는?

① $k > -1$

② $k > 0$

③ $k < -1$

④ $k < 1$

⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \leq 0$ 에서

$(x+1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

$x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0$ 에서

$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

i) $k+2 < 1$ 이면

$\textcircled{\text{㉡}}$ 의 해는 $k+2 < x < 1$ 가 되므로

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k+2 > 1$ 이면

$\textcircled{\text{㉡}}$ 의 해는 $1 < x < k+2 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 의 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 가 되려면

$k+2 > 2 \quad \therefore k > 0$

11. 이차함수 $y = 6x^2 + ax + b$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

해설

이차부등식 $6x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$

이므로 $\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$ 는 이차방정식 $6x^2 + ax + b = 0$ 의

두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{a}{6} \text{에서 } a = -17$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{b}{6} \text{에서 } b = 5$$

$$\therefore a + b = -12$$

12. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 4

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

13. $0 < x < 2$ 일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$ 의 모든 해의 합은?(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$ 에서 $0 < x < 2$ 이므로

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$2x^2 - x = 0, x(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$2x^2 - x - 3 = 0, (x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

14. 두 직선 $x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점과 직선 $4x + 3y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점은 $(2, 1)$

∴ $4x + 3y - 1 = 0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

15. 두 부등식 $2x - 1 > 0$, $(x + 1)(x - a) < 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이 되도록 하는 정수 a 의 값은? (단, $a > 1$)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$2x - 1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x + 1)(x - a) < 0$$

$$\therefore -1 < x < a \dots\dots \textcircled{2}$$

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이므로

$$\therefore a = 3$$

16. 중심이 $C(1, 2)$ 이고, 직선 $L : x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

17. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a + b + c + d$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 15$$

해설

(i) a, b, c, d 의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ii) 조립제법: 좌변을 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫의 계수가 a 이다.

18. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases} \text{의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상}$$

옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$

㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이

모두 $b^2 - 4ac$ 이고

$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.

㉡주어진 식에

1을 대입하면 성립한다.

19. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \leq 0$

② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$

④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2})(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2}) \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

② $(x + 1)(x - 3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x - 1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

20. 직선 $3x + 4y + k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 만나지 않을 때, 실수 k 값의 범위는?

① $k = -10$

② $k = 10$

③ $-10 < k < 10$

④ $k < -10$ 또는 $k > 10$

⑤ $k > 10$

해설

직선 $3x + 4y + k = 0$ 에서 원의 중심 $(0, 0)$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|k|}{5} \text{이다.}$$

원과 직선이 만나지 않을 때, $d > r$ 이므로

$$\frac{|k|}{5} > 2$$

$$\therefore k < -10 \text{ 또는 } k > 10$$

21. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ ($0 < x < 4$)의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$

② $\sqrt{10}$

③ 3

④ $\sqrt{7}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$x^2 - 5 = 0, (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{5} \text{ 또는 } x = \sqrt{5}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 해가 없다.

(iii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로

$$x^2 - 6 = 0, (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{6} \text{ 또는 } x = \sqrt{6}$$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 $x = \sqrt{6}$

(iv) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로

$$x^2 - 7 = 0, (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{7} \text{ 또는 } x = \sqrt{7}$$

그런데 $3 \leq x < 4$ 이므로 해가 없다.

따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

22. 점 P(1,2) 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 점 H 의 좌표는?

① $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$

② (2,1)

③ $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$

④ (1,2)

⑤ (2,2)

해설

H = (a, b) 라 하면, \overline{PH} 는 $y = -2x + 3$ 에 수직하고 H 는 직선 위에 있다.

i) $\frac{b-2}{a-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a - 2b = -3$

ii) $b = -2a + 3$

i), ii) 를 연립하면, $a = \frac{3}{5}$ $b = \frac{9}{5}$

$\therefore \left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$

23. 부등식 $0 \leq x \leq 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \leq 0$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

부등식 $0 \leq x \leq 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \leq 0$ 의 영역에 포함되어야하므로

$0 \leq x \leq 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \leq 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \leq 0$ 에서

$-2 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{\text{A}}$

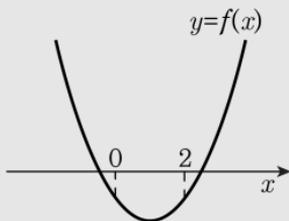
$f(2) = a^2 - 2a \leq 0$ 에서

$0 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 \leq a \leq 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$



24. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 와 같은 중심을 가지고 $x + y + 1 = 0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$

② π

③ 2π

④ 3π

⑤ 4π

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2$$

따라서 구하는 원의 중심 : (1, 0)

반지름은 중심에서 $x + y + 1 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\frac{|1 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

∴ 넓이 : 2π

25. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \leq x < 2$ 일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 해를 α 라 하면 2α 의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$

② $\sqrt{2} + 1$

③ $\sqrt{3} + 2$

④ $\sqrt{3} - 1$

⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
 $-4x - 1 = 0$

$$\therefore x = -\frac{1}{4} \text{ (부적합)}$$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
 $4x^2 - 4x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$1 \leq x < 2 \text{이므로 } x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$\therefore 2\alpha = \sqrt{2} + 1$$

26. 두 부등식 $x < -1$, $x > 2$, $2x^2 + (5 + 2a)x + 5a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 값이 $x = -2$ 뿐일 때, 실수 a 의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

- ① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ -5

해설

$$2x^2 + (5 + 2a)x + 5a = (2x + 5)(x + a) < 0$$

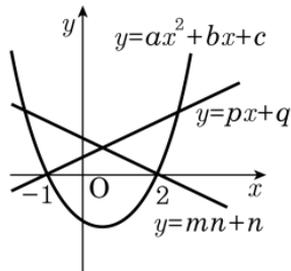
$$-\frac{5}{2} < x < -a \quad \left(\because a < \frac{5}{2} \right)$$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$ 뿐이므로 $-2 < -a \leq 3$

$$\therefore -3 \leq a < 2$$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 -3

27. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 두 직선 $y = px + q$, $y = mx + n$ 이 x 축 위의 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ 에서 만나고 있다. 이 때, 다음 연립부등식의 해는?

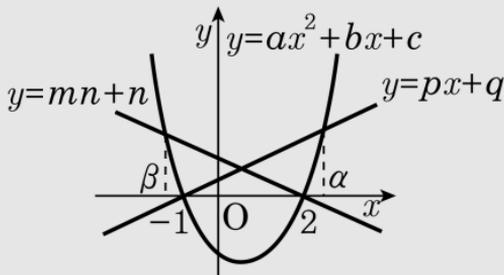


$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$

- ① $-1 < x < 3$ ② $0 < x < 2$ ③ $0 < x < 3$
 ④ $-1 < x < 2$ ⑤ $-2 < x < 3$

해설

주어진 연립부등식의 해는 포물선이 두 직선 보다 모두 아래에 있는 부분이다.



$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q & \cdots \textcircled{\Gamma} \\ ax^2 + bx + c < mx + n & \cdots \textcircled{\ominus} \end{cases}$$

⑦ 식의 근 $-1 < x < \alpha$ ($\alpha > 2$) \cdots (i)

⑨ 식의 근 $\beta < x < 2$ ($\beta < -1$) \cdots (ii)

(i), (ii)을 동시에 만족하는 x 의 범위는 $-1 < x < 2$

28. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 접할 때, k 의 값 또는 그 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = \pm 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 에서 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이 $r = \sqrt{5}$ 이다. 한편, 원의 중심에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리를 d

라 하면, $d = \frac{|-k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ 이므로 접할 조건은 $d = r$

따라서, $\frac{|-k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \therefore k = \pm 5$

29. $1 < x < 4$ 일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$ 의 근의 개수는?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$$

이것은 모두 $1 < x < 2$ 를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$$

이것은 모두 $2 \leq x < 3$ 를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.

(iii) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } 3$$

그런데 $3 \leq x < 4$ 를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1개이다.

30. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

31. 두 부등식 $-x^2 - 3x + 4 \leq 0$,

$x^2 + ax + b < 0$ 에 대하여

두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $1 \leq x < 3$ 일 때, 실수 a, b 의 합 $a + b$ 를 구하면?

① -12

② -11

③ -10

④ 11

⑤ 12

해설

$$-x^2 - 3x + 4 \leq 0, \quad x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\therefore a = 1, b = -12 \Rightarrow a + b = -11$$

32. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26