

1. 다항식 $f(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $f(x)$ 를 $2x - 1$ 으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

- ① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$ ② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$ ④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x - \frac{1}{2}$ 에 2를 곱하면 $2x - 1$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)Q(x) + R = (2x - 1)\frac{1}{2}Q(x) + R$$

2. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

4. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $ax + b(a \neq 0)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \quad \therefore R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$g(x) = xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지는

$$g\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}R$$

5. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1, x = 2$ 를 대입하면 성립하므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$
따라서 실수근은 $-1, 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

6. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = -1, 0, 1$$

7. 부등식 $x^2 + x + m \geq 0$ 의 x 의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m 의 최솟값은?

① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 + x + m \geq 0$ 이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x^2 + x + m = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = 1^2 - 4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$$

따라서 실수 m 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

8. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 이 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

x 의 계수가 미지수이므로
i) $a = 0$ 일 때,
 $3 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.
ii) $a \neq 0$ 일 때,
 $ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 의 해가 모든 실수이려면
 $a > 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = a^2 - 3a < 0, a(a - 3) < 0$
 $\therefore 0 < a < 3 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < a < 3$
i), ii)에서 $0 \leq a < 3$
따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.

9. 두 부등식 $|x-1| < 2$, $x^2 - 2ax + a^2 - 4 \geq 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $-1 < x \leq 2$ 가 되도록 상수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -2 ③ 4 ④ -6 ⑤ 8

해설

$|x-1| < 2$ 의 해는 $-1 < x < 3$ 이므로
공통범위가 $-1 < x \leq 2$ 가 되려면 $x=2$ 가
 $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ 의 근이어야 한다.
 $\therefore 4 - 4a + a^2 - 4 = 0$
 $\therefore a = 0, 4$
그런데 $a=0$ 이면,
공통범위는 $2 \leq x < 3$ 이 되어 모순이다.
 $\therefore a = 4$

10. 두 부등식 $x^2 - 2x - 8 > 0$,
 $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a < 0$ 에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록
하는 실수 a 의 범위를 $b \leq a \leq c$ 라 할 때, $b + c$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x - 4)(x + 2) > 0$,
 $\therefore x > 4, x < -2$
 $x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) < 0$
 $(x - a)(x - a - 1) < 0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
 $a \geq -2, a + 1 \leq 4 \rightarrow a \leq 3$
 $\therefore -2 \leq a \leq 3$
 $\therefore b = -2, c = 3$
 $\therefore b + c = 1$

11. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$

㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면
접선의 방정식은
 $x_1x + y_1y = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$
㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
 $2x_1 + 4y_1 = 4, x_1 + 2y_1 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$
또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
 $x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
 $x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

12. 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접할 때, 접점의 좌표 또는 접선의 방정식으로 옳지 않은 것은?
- ① 접점의 좌표: $(2, 1)$
 - ② 접선의 방정식: $2x + y - 5 = 0$
 - ③ 접점의 좌표: $(-1, 2)$
 - ④ 접선의 방정식: $x - 2y + 5 = 0$
 - ⑤ 접점의 좌표: $(1, 2)$

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, 접선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 + 3y_1 = 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 접점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $x_1 = 5 - 3y_1$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = -1, y_1 = 2$$

따라서, 구하는 접점의 좌표는 $(2, 1), (-1, 2)$

이것을 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$2x + y - 5 = 0 \text{ 또는 } x - 2y + 5 = 0$$