

1. $(-2x^3 + x^2 + ax + b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a - 2b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b + 2a)x^3$$

$$2a - 4b = -8$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

2. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0

② 2

③ -2

④ 4

⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은

(3차항) $\times$ (상수항), (2차항) $\times$ (1차항)

2쌍씩이다.

$$4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$$

3. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

4. x 에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

5. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $x^2 + ax + b$ 와 $x^2 + 3bx + 2a$ 는
모두 $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.
 $\therefore 1 + a + b = 0$ 이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2$, $b = 1$
 $\therefore a + b = -1$

6. x 에 대한 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 + bx$ 와 $B = x^2 + bx + a$ 의 최대공약수가 일차식이다. 그 최대공약수를 구하면? (단, a, b 는 상수이고 $ab \neq 0$)

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x + 1$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 3$

해설

$$A(x) = x(x^2 + ax + b), B(x) = x^2 + bx + a$$

인수를 $(x - p)$ 로 놓으면

$$A(p) = 0 \text{에서 } p^3 + ap^2 + bp = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$B(p) = 0 \text{에서 } p^2 + bp + a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times p \text{에서 } (a - b)p^2 + (b - a)p = 0$$

$$\therefore (a - b)p(p - 1) = 0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $p \neq 0$

$$\therefore p = 1$$

따라서 최대공약수는 $x - 1$

7. 두 이차식의 $x^2 + ax + 2b$, $x^2 + bx + 2a$ 최대공약수가 일차식일 때 $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ -2 ④ 4 ⑤ 9

해설

일차식은 최대공약수를 $x - \alpha$ 라 놓으면
두 다항식은 각각 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어지므로
 $\alpha^2 + a\alpha + 2b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + b\alpha + 2a = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 $(a - b)\alpha - 2(a - b) = 0$
 $\therefore (a - b)(\alpha - 2) = 0$
 $a = b$ 이면 두 다항식이 같게 되어 조건이 어긋난다.
따라서 $\alpha = 2$ 일 때 이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\therefore a + b = -2$

8. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 이고, 최대공약수가 $x + 2$ 일 때, 두 다항식의 합은?

- ① $2x^2 + x - 6$ ② $2x^2 - 2x + 3$ ③ $2x^2 - 3x + 4$
④ $2x^2 - 6$ ⑤ $2x^2 - 8$

해설

두 다항식을 $A = aG$, $B = bG$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$$L = abG = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

이 때, 최대공약수 G 가 $x + 2$ 이므로 조립제법을 하여 L 을 인수분해하면

$$\begin{aligned}\therefore L &= (x^3 - 4x + 3)(x + 2) \\ &= (x - 1)(x - 3)(x + 2)\end{aligned}$$

따라서, 구하는 두 이차 다항식은

$$(x - 1)(x + 2) \text{ 와 } (x - 3)(x + 2),$$

$$\text{즉 } x^2 + x - 2, x^2 - x - 6 \text{ 이다.}$$

따라서, 두 다항식의 합은 $2x^2 - 8$ 이다.

9. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \cdot B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB)$ 와 같은 것은?

- ① 1
- ② A
- ③ AB
- ④ AL
- ⑤ AG

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$A^2 \cdot B^2 = a^2G^2 \cdot b^2G^2 = G^2$

$A^2 \cdot AB = a^2G^2 \cdot abG^2 = aG^2$

$\therefore (A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB) = G^2 \star aG^2 = aG^2 = AG$

10. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \circ B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 할 때, 다음 계산 과정의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

$$\begin{aligned} A &= aG, B = bG \text{ (} a, b \text{ 는 서로소)} \\ A^2 \circ AB &= [(가)], A^2 \circ B^2 = [(나)] \\ \therefore (A^2 \circ AB) \star (A^2 \circ B^2) &= [(다)] \end{aligned}$$

- ① A, G^2, A

② aG^2, G, A

③ A, AB, AG
- ④ aG^2, G^2, AG

⑤ G, G, AB

해설

$$\begin{aligned} (가) &= A^2 \circ AB = (G^2a^2 \text{ 과 } G^2ab \text{ 의 최대공약수}) \\ &= aG^2 \\ (나) &= A^2 \circ B^2 = (G^2a^2 \text{ 과 } G^2b^2 \text{ 의 최대공약수}) \\ &= G^2 \\ (다) &= (A^2 \circ AB) \star (A^2 \circ B^2) \\ &= ((가) \text{ 와 } (나) \text{ 의 최소공배수}) = aG^2 = AG \end{aligned}$$

11. $\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i

② $-i$

③ $-\frac{i}{2}$

④ $\frac{1-i}{2}$

⑤ $\frac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4} = \frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1} = \frac{-i}{1} = -i$$

12. $\sqrt{(-1)^2} + i^2 - \frac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1

② 0

③ 1

④ $-i$

⑤ i

해설

(준식) $= 1 - 1 + i = i$

13. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ㉠ $-1 \leq x < 0$ ㉡ $-1 \leq x < 1$ ㉢ $-1 \leq x < 2$
㉣ $0 \leq x < 1$ ㉤ $0 \leq x < 2$

해설

$$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$[x] = -1 \text{ 또는 } [x] = -\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 은 정수이므로 $[x] = -1$

$$\therefore -1 \leq x < 0$$

14. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$ 의 해를 $a \leq x < b$ 라 할 때, $2a + b$ 의 값을 구하면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = 1$

$$\therefore 1 \leq x < 2$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \text{ 이므로 } 2a + b = 4$$

15. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \bar{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$ (○)

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

③ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$\omega + \bar{\omega} = -1$

$\bar{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$

$\therefore \bar{\omega} = \omega^2$ (○)

④ $\omega^2 + \omega = -1$ (○)

⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$ (×)

16. $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $\omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$ 의 값은?

① 3

② -1

③ 1

④ 0

⑤ 2

해설

문제의 조건에서 ω 는

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 를 만족시키므로

위식의 양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$$

$$= (\omega^3)^{670} \cdot \omega^2 + (\omega^2)^{671} + (\omega^3)^{671} \cdot \omega$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

17. 300 원짜리 사과와 200 원짜리 귤을 합하여 15 개를 사는데 금액을 3950 원 이하로 꿀보다 사과를 많이 사려고 한다. 이 조건을 만족하여 살 수 있는 사과의 개수는 최대 몇 개인가?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 9개

해설

사과의 개수 : x 개, 귤의 개수 : $(15 - x)$ 개

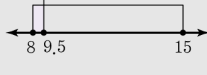
$$\begin{cases} 300x + 200(15 - x) \leq 3950 \cdots \textcircled{7} \\ 8 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} : 300x + 3000 - 200x \leq 3950$$

$$100x \leq 3950 - 3000$$

$$100x \leq 950$$

$$\therefore x < 9.5$$



따라서 살 수 있는 사과 최대 개수는 9 개이다.

19. 이차함수 $y = x^2 - 2x$ 의 그래프가 직선 $y = a$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < b$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$x^2 - 2x < a \text{ 에서 } x^2 - 2x - a < 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

한편, 해가 $-1 < x < b$ 이고

이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x + 1)(x - b) < 0$$

$$\therefore x^2 + (1 - b)x - b < 0 \text{ 이}$$

부등식 $\textcircled{㉠}$ 과 일치해야 하므로

$$1 - b = -2, a = b$$

따라서 $a = 3, b = 3$ 이므로 $ab = 9$

20. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

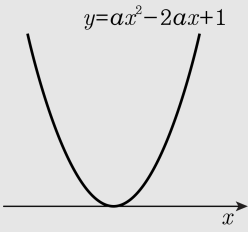
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

21. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \leq (a - 1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$

② $a > -1$

③ $a \geq -1$

④ $a < -1$

⑤ $a \leq -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a - 1)x - 3$ 이라 두어,
 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 되도록 하자.
 $f(0) \leq 0$ 그리고 $f(1) \leq 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
 $f(1) = 1 - (a - 1) - 3 \leq 0$ 에서 $a \geq -1$

22. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a - 1)x - 4 < 0$

$1 \leq x \leq 2$ 에서

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

방정식 $x^2 + (a - 1)x - 4 = 0$ 의 한 근이 1보다 작고, 다른 한 근은 2보다 커야 한다.

$f(x) = x^2 + (a - 1)x - 4$ 로 놓으면

$f(1) = 1 + (a - 1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots \text{㉠}$

$f(2) = 4 + 2(a - 1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots \text{㉡}$

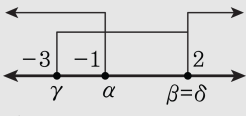
㉠, ㉡에서 $a < 1$

23. 두 부등식 $x^2 + ax + b \geq 0$, $x^2 + cx + d \leq 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 범위가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x = 2$ 라고 한다.
이 때 $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

- ① -6 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -3

해설

$x^2 + ax + b \geq 0$ 의 해를 $x \leq \alpha$, $x \geq \beta$
 $x^2 + cx + d \leq 0$ 의 해를 $\gamma \leq x \leq \delta$ 라고
 하면
 공통의 해가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x = 2$ 이려면
 다음 그림에서와 같이 $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$, $\delta = 2$ 이어야
 한다.
 $\therefore x^2 + ax + b = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ 이므로 $a = -1$, $b = -2$
 $x^2 + cx + d = (x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$ 이므로 $c = 1$, $d = -6$
 따라서 $a + b + c + d = -1 + (-2) + 1 + (-6) = -8$



24. 두 부등식 $x^2 - 2x - 3 > 0$,
 $x^2 + ax + b \leq 0$ 에 대하여
 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두
 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $3 < x \leq 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을
 구하면?

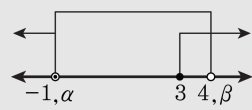
① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

해설

$$(x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ 또는 } x > 3$$

$$x^2 + ax + b \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta \text{ 라 하자}$$

주어진 조건을 만족하려면



$$\therefore \alpha = -1, \beta = 4$$

$$(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$$

$$a = -3, b = -4$$

$$\therefore a + b = -7$$

25. 이차방정식 $x^2 + 2kx + k = 0$ 의 두 근이 모두 -1 과 1 사이에 있기 위한 k 값의 범위가 $a < k \leq b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$D/4 = k^2 - k \geq 0, k(k-1) \geq 0, \therefore k \leq 0, k \geq 1$$

$$f(x) = x^2 + 2kx + k \text{라 하면}$$

$$f(-1) = 1 - k > 0$$

$$\therefore k < 1$$

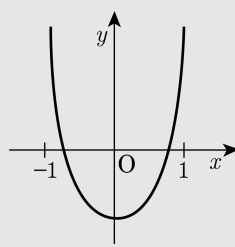
$$f(1) = 1 + 3k > 0 \therefore k > -\frac{1}{3}$$

$$\text{대칭축 } x = -k \text{ 이므로 } -1 < -k < 1$$

$$\therefore -1 < k < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < k \leq 0$$

$$\therefore ab = 0$$



26. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

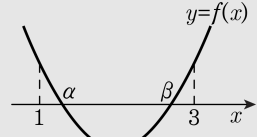
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
 $f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
 $\therefore a < \frac{13}{3}$

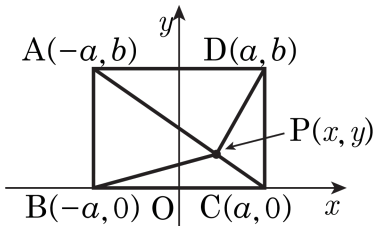
(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
 $\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

27. 다음은 직사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$ 이 성립함을 보인 것이다. ㉠ ~ ㉣에 들어갈 말 중 옳지 않은 것은?

다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 변 BC를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면
 $A(-a, b)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$ 로 놓을 수 있다.



이때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 =$ ㉠ + ㉡
 $= 2(x^2 + y^2 + a^2 - by) + b^2 \cdots$ ㉢
 $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 =$ ㉣ + ㉤
 $= 2(x^2 + y^2 + a^2 - by) + b^2 \cdots$ ㉥
㉢, ㉥로부터 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 =$ ㉦

- ㉠ ㉠ : $(x + a)^2 + (y + b)^2$ ㉡ ㉡ : $(x - a)^2 + y^2$
㉢ ㉢ : $(x + a)^2 + y^2$ ㉣ ㉣ : $(x - a)^2 + (y - b)^2$
㉤ ㉤ : $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$

해설

$A(-a, b)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$, $P(x, y)$ 이므로
 $\overline{AP}^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2 \cdots$ (가)
 $\overline{CP}^2 = (x - a)^2 + y^2 \cdots$ (나)
 $\overline{BP}^2 = (x + a)^2 + y^2 \cdots$ (다)
 $\overline{DP}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \cdots$ (라)
 $\therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 \cdots$ (마)

28. 두 점 A(3, -1), B(a, -3)에 대하여 $\overline{AB} = 2$ 일 때, a의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AB}^2 = (a - 3)^2 + (-3 + 1)^2 = 4$$

$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$(a - 3)^2 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

29. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

㉠ $5x-y-9=0$

㉡ $5x+y-9=0$

㉢ $x-2y-1=0$

㉣ $2x-3y-1=0$

㉤ $2x-y+3=0$

해설

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x+2y-4=0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} : x=2, y=1$$

$$\therefore \text{교점} : (2, 1)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y-1 = \frac{-4-1}{1-2}(x-2) = 5(x-2)$$

$$\therefore 5x-y-9=0$$

30. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

31. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$ 의 교점과 원점을 지나는 직선이 있다. 이 직선과 점 $(10, -2)$ 사이의 거리의 제곱은?

① 13 ② 26 ③ 52 ④ 78 ⑤ 104

해설

두 직선의 교점은 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$ 을 연립하여 풀면,

$$x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3} \right) \text{ 과 } (0, 0) \text{ 을 지나는 직선은 } y = 5x$$

$\therefore 5x-y=0$ 과 $(10, -2)$ 사이의 거리를 구하면,

$$\frac{|5 \times 10 + (-1) \times (-2)|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{52}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow \text{거리의 제곱은 } \frac{52^2}{26} = 104$$

32. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O로부터 동쪽으로 6 km, 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O로부터 동쪽으로 5 km, 북쪽으로 4 km의 위치에 마을 P가 있다. 이 때, 마을 P에서 강까지의 최단 거리를 구하시오. (단위는 km)

① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O를 원점 O로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.

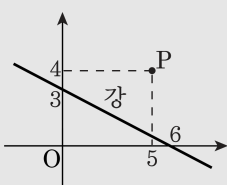
강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 즉, } x + 2y - 6 = 0$$

이때, 마을 P의 좌표는 (5, 4)이다.

따라서, 점 (5, 4)에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} (km)$$



33. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

34. 원 $x^2 + y^2 = k$ 와 직선 $y = -x + 1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k > 0$)

- ㉠ $0 < k < \frac{1}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2} < k < 1$ ㉢ $1 < k < \frac{3}{2}$
㉣ $\frac{3}{2} < k < 2$ ㉤ $k > 2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과
직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이
 r 에 대하여 $d > r$ 이어야 한다.

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} > \sqrt{k} \text{ (단, } k > 0 \text{)}$$

$$\therefore 0 < k < \frac{1}{2}$$

35. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
 $\Rightarrow$ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$
 $\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$
 $\Rightarrow k = \pm 2$
 $\therefore k = -2$ ($\because k < 0$)

36. 직선 $ax + by + 2 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이
거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|a \times 0 + b \times 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$

$\therefore$ 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

37. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 y 축의 방향으로 b 만큼, 평행이동하면 직선 $4x - 3y - 4 = 0$ 에 접한다고 할 때 b 의 값은?(단, $b > 0$)

- ㉠ $\frac{1}{3}$ ㉡ $\frac{2}{3}$ ㉢ 1 ㉣ $\frac{4}{3}$ ㉤ $\frac{5}{3}$

해설

y 축 방향으로 b 이동시키면
 $x^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다.
이 원과 $4x - 3y - 4 = 0$ 이 접하므로,
원 중심과 직선 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-3 \times b - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

$$\Rightarrow |-3b - 4| = 5$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{3} \quad (\because b > 0)$$

38. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동하면 직선 $y = 2x + 3$ 에 접하게 된다. 이때, n 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면
 $y = -x^2$ ㉠
포물선 ㉠을 y 축 방향으로 n 만큼 평행이동하면
 $y - n = -x^2$ ㉡
포물선 ㉡과 직선 $y = 2x + 3$ 이 접하여야 하므로
 $x^2 + 2x + 3 - n = 0$ 에서 판별식
 $\frac{D}{4} = 1 - (3 - n) = 0$ 이어야 하므로 $n = 2$