

1. 정식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때 3이 남고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때 3x가 남는다. $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x - 1$

② $6x - 2$

③ $6x - 3$

④ $6x - 5$

⑤ $6x - 9$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q_1(x) + 3 \\ &= (x - 1)(x - 2)Q_1(x) + 3 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_2(x) + 3x \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_2(x) + 3x \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 2)(x - 3)Q(x) + ax + b \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서 } f(2) = 3 = 2a + b \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉤} \text{에서 } f(3) = 9 = 3a + b \cdots \cdots \textcircled{㉥}$$

$$\therefore \textcircled{㉤}, \textcircled{㉥} \text{에서 } a = 6, b = -9$$

$$\therefore \text{나머지는 } 6x - 9$$

2. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x - 7$ 이고, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $4x + 3$

③ $x - 1$

④ $4x - 9$

⑤ $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 5)Q(x) + ax + b \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x - 5)(x + 2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1) = -5$, $f(5) = 11$ 이다.

⑦에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$f(5) = 5a + b = 11$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는 $4x - 9$ 이다.

3. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 (α, β) 라 할 때,
 α^2, β^2 을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$

② $x^2 + 5x - 3 = 0$

③ $x^2 - 5x + 1 = 0$

④ $x^2 + 6x - 1 = 0$

⑤ $x^2 - 6x + 1 = 0$

해설

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 & \dots \textcircled{㉠} \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 10 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases} \text{이므로}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

㉡ - ㉢에서

$$\alpha\beta = 1 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2 + \beta^2 = 6, \alpha^2\beta^2 = 1$

$\therefore \alpha^2, \beta^2$ 을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

4. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 두 수 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 - bx + 4 = 0$ 이다. 이 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a$$

한편, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 방정식은

$$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = a + 2$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha\beta) = 2a \text{에서}$$

$$x^2 - (a + 2)x + 2a = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠이 $x^2 - bx + 4 = 0$ 과 같으므로

$$a + 2 = b, 2a = 4 \text{에서 } a = 2, b = 4$$

$$\therefore a + b = 2 + 4 = 6$$

5. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \text{ 에서 } (a - 2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$a^2 - 12 < 0 \text{ 에서 } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2$$

6. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$ 이 직선 $y = kx - 6$ 보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$ 을 이용하여 $\alpha + \beta$ 를 구하면,

$$(1 + k)^2 - 36 < 0$$

$$k^2 + 2k - 35 < 0, (k + 7)(k - 5) < 0 \therefore -7 < k < 5$$

$$\therefore \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$$

7. 어떤 정수에 3 을 곱하고 5 를 더하면 14 보다 크고, 원래 정수에 4 배하고 2 를 빼면 18 보다 작다고 한다. 이 때, 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

어떤 정수를 x 라고 하고, 문제의 조건에 따라 두 개의 식을 만든다. “어떤 정수에 3 을 곱하고 5 를 더하면 14 보다 크고”을 식으로 표현하면, $3x + 5 > 14$ 이다. “원래 정수에 4 배하고 2 를 빼면 18 보다 작다”를 식으로 표현하면, $4x - 2 < 18$ 이다. 두

개의 식을 연립방정식으로 표현하면,
$$\begin{cases} 3x + 5 > 14 \\ 4x - 2 < 18 \end{cases} \quad \text{이고, 이}$$

를 간단히 하면,
$$\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \quad \text{이다. 따라서 어떤 정수는 } 3 < x < 5$$

이므로 4이다.

8. 어느 연속하는 세 수의 합이 111 보다 크고 117 보다 작다고 할 때, 세 수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 114

해설

연속 하는 세 수 이므로 중간에 있는 수를 x 라고 하면 연속하는 세수는 $x-1$, x , $x+1$ 이라고 표현되고, 세수의 합은 $3x$ 이다.

문제의 조건을 따르면,
$$\begin{cases} 3x > 111 \\ 3x < 117 \end{cases}, \text{ 또는 } 111 < 3x < 117 \text{ 로}$$

표현 할 수 있다. 따라서 $\frac{111}{3} < x < \frac{117}{3}$ 이다. 이는 $37 < x < 39$ 이다 따라서 x 는 38 이다. 그러므로 $3x = 114$ 이다.

9. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 6)이고 무게중심 G의 좌표가 (3, 4)일 때, 변 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는?

① (1, 2)

② (2, 5)

③ (2, 3)

④ (3, 4)

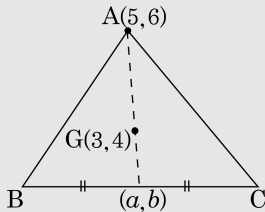
⑤ (4, 5)

해설

무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$$\therefore G\left(\frac{2a+5}{2+1}, \frac{2b+6}{2+1}\right) = (3, 4)$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$



10. 세 꼭짓점이 $A(-1, -1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점을 각각 D , E , F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m : n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

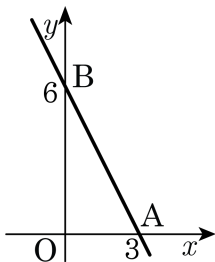
$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1 + 4 + 0}{3}, \frac{-1 + 3 + 1}{3} \right),$$

즉 $(1, 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1, 1)$ 이다.

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

11. x 축, y 축 및 직선 $y = -2x + 6$ 으로 둘러싸인 $\triangle OAB$ 의 넓이를 3등분하고, 원점을 지나는 두 직선의 방정식은 $y = ax$ 와 $y = bx$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

원점을 지나며 $\triangle OAB$ 의 넓이를 3등분하는 직선은

$\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점과

2 : 1로 내분하는 점 (2, 2)와 (1, 4)를 각각 지난다.

두 점 (0, 0), (2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $y = x$ 이고,

두 점 (0, 0), (1, 4)를 지나는 직선의 방정식은 $y = 4x$ 이다.

그러므로 $a + b = 1 + 4 = 5$

12. 점 $A(0, 2)$, $B(2, 0)$, $C(3, 3)$ 으로 이루어진 삼각형 ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x + (k-1)y = 2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

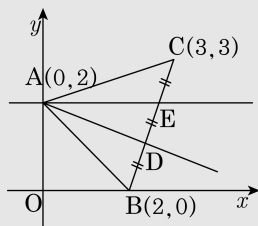
해설

$k(x+y-2) + x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이

$A(0, 2)$ 를 지나는 직선이므로

$\triangle ABC$ 를 그림과 같이

2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는 점 D , E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, $E\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3} + 1 - 2\right) + \frac{7}{3} - 1 + 2 = 0$$

$$k = -\frac{5}{2} \text{ 이므로 부적합 } (\because k \text{ 는 정수})$$

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3} + 2 - 2\right) + \frac{8}{3} - 2 + 2 = 0$$

$$\therefore k = -1$$