

1. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

2. $(1 + ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1 + ai)(1 - ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(1 + ai)^2 = 2i \text{ 에서 } (1 - a^2) + 2ai = 2i$$

$$\text{복소수의 상등에서 } 1 - a^2 = 0, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (1 + ai)(1 - ai) = (1 + i)(1 - i)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

3. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$$

$$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = b-2, a-6 = -a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b = 5, a = 3$$

$$\therefore a+b=8$$

4. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때

$$(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$$

모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로

$$a + b + c = 44$$

따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

5. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

6. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a \end{aligned}$$

$x^2+8x=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (A+7)(A+15)+a \\ &= A^2+22A+105+a \\ &= (A+11)^2-16+a \end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

7. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 2x$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 9x - 9$ 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

① -32

② -24

③ -16

④ -12

⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b 는 서로소)

$$f(x) + g(x) = G(a + b) = 2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$$

$$\text{최소공배수 } Gab = x^3 + x^2 - 9x - 9$$

$$= (x + 1)(x + 3)(x - 3)$$

이상에서 $G = x + 1$ 이고 $ab = (x - 3)(x + 3)$

$$\text{따라서 } f(x)g(x) = G^2ab = (x + 1)^2(x + 3)(x - 3)$$

$$\therefore f(1)g(1) = -32$$

8. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3 + 3w^2 + 4w} = aw + b$ 를 만족하는 실수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ 2

④ 1

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w (허근) 라 하고, $w^2 + w + 1 = 0$ 에서 양변에 $w - 1$ 을 곱하면,

$$w^3 - 1 = 0 \quad \therefore w^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2w^3 + 3w^2 + 4w} &= \frac{1}{3w^2 + 4w + 2} \\ &= \frac{1}{3(w^2 + w + 1) + w - 1} \\ &= \frac{w - 1}{w + 2} \\ &= \frac{(w - 1)(w + 2)}{w + 2} \\ &= \frac{w^2 + w - 2}{w + 2} \\ &= \frac{-3}{\frac{1}{3}w - \frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} = aw + b \text{ 에서}$$

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3} \quad \therefore a + b = -1$$

9. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2 - 1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x+1)(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

10. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i, b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

11. $\frac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\frac{3+11i}{8}$

② $\frac{9+11i}{8}$

③ $\frac{3+9i}{10}$

④ $\frac{3+11i}{10}$

⑤ $\frac{9+11i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{6-3+11i}{10} \\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

12. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ 의 한 근이 1일 때 다른 한 근은?
(단, m 은 상수)

① 3

② 2

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -3, 1$$

따라서, 다른 근은 -3

13. 방정식 $|x - 1| = 5$ 의 모든 해의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$|x - 1| = 5$ 에서 $x - 1 = \pm 5$

(i) $x - 1 = 5$ 일 때, $x = 6$

(ii) $x - 1 = -5$ 일 때, $x = -4$

따라서 방정식의 두 실근의 합은

$$6 + (-4) = 2$$

14. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 (\because a+b+c=0) \\ &\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ &\therefore (\text{준식}) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0 \end{aligned}$$