1. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$가 x값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$-2=2a \quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-3=-b \ \therefore\ b=3$
양변에 $x=2$를 대입하면
$0=2c \ \therefore c=0$
$\therefore\ a+b+c=2$

2. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$

복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$

$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i)\\ &= 1-(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

3. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$

$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b = 5$, $a = 3$

$\therefore$ $a+b=8$

4. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1\neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

5. 대각선의 길이가 28 이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2=28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로
$a+b+c=44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

6. $N=69^3+3\cdot 69^2+3\cdot 69+1$의 양의 약수의 개수는?

① 6개 ② 12개 ③ 20개 ④ 24개 ⑤ 64개

해설

$N=69^3+3\cdot 69^2+3\cdot 69+1$
$\quad=(69+1)^3=(2\cdot 5\cdot 7)^3$
따라서 N의 양의 약수는 개수는 $4^3=64$

7. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

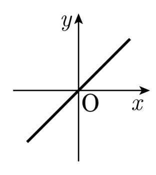
이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

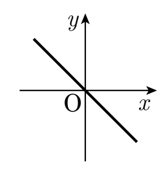
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

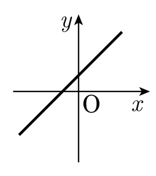
해설

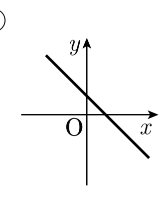
두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots$㉠
또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로
$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$
($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면
$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$
$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$이므로
$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.
$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$
$=2(x-2)(x+1)\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$
$\therefore\ G(2)=0$

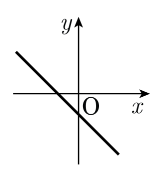
8. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 (x, y)로 나타낼 때, 점 (x, y)는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y는 실수)

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{aligned}(3+2i)(x+yi) &= 3x+3yi+2xi-2y \\ &= (3x-2y)+(2x+3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

9. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

10. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$
$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$
$x^2+8x=A$로 놓으면
(준식) $=(A+7)(A+15)+a$
$=A^2+22A+105+a$
$=(A+11)^2-16+a$
따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

11. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3-ac^2+a^2b+ab^2+a^3-bc^2=0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+b^3+ab^2=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$

$-(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b\neq 0)$

$c^2-a^2-b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ C=90°$인 직각삼각형

12. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$
ⅰ) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4),\ (x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.
ⅱ) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6),\ (x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.
ⅲ) G.C.M. $=x+4$일 때도 ⅱ)와 같음
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $p+q=-1$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2+2x$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-9x-9 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

① -32 ② -24 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b 는 서로소)

$f(x) + g(x) = G(a+b) = 2x^2 + 2x = 2x(x+1)$

최소공배수 $Gab = x^3 + x^2 - 9x - 9$

$= (x+1)(x+3)(x-3)$

이상에서 $G = x+1$ 이고 $ab = (x-3)(x+3)$

따라서 $f(x)g(x) = G^2ab = (x+1)^2(x+3)(x-3)$

$\therefore\ f(1)g(1) = -32$

14. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$
④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$ 이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$ 에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식) $= 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

15. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \qquad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ a+b=-1$

16. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$　② $100x-99$　③ $-100x-99$
④ $-99x-98$　⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$
x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1 이므로
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1\ (\Rightarrow a+1=b)$
$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$
양변에 $x=-1$ 을 대입하면
$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$
$a=-100,\ a+1=b$ 에서 $b=-99$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

17. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3}+1$ ④ $\frac{x}{2}+1$ ⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$
$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$
이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면
$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는
$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로
$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서
$3ab^2x+b^3=x+1$
$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$
$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$
$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

18. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

19. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$

③ $a+c$ ④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $= \{(a+b+c)^3 - a^3\} - (b^3+c^3)$

$= (a+b+c-a)\{(a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$= (b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$= 3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$= 3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$= 3(a+b)(b+c)(c+a)$

20. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$$