

1. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

2. $(1 + ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1 + ai)(1 - ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(1 + ai)^2 = 2i \text{ 에서 } (1 - a^2) + 2ai = 2i$$

$$\text{복소수의 상등에서 } 1 - a^2 = 0, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (1 + ai)(1 - ai) = (1 + i)(1 - i)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

3. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$$

$$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = b-2, a-6 = -a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b = 5, a = 3$$

$$\therefore a+b=8$$

4. $\frac{2x + ay - b}{x - y - 1}$ 가 $x - y - 1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\frac{2x + ay - b}{x - y - 1} = k \text{라 놓으면}$$

$$2x + ay - b = k(x - y - 1)$$

x, y 에 대하여 정리하면,

$$(2 - k)x + (a + k)y - b + k = 0$$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$$2 - k = 0, a + k = 0, -b + k = 0$$

$$\therefore k = 2, a = -2, b = 2$$

$$\therefore a - b = -4$$

5. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때

$$(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$$

모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로

$$a + b + c = 44$$

따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

6. $N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 6개

② 12개

③ 20개

④ 24개

⑤ 64개

해설

$$N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$$

$$= (69 + 1)^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3$$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는 $4^3 = 64$

7. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$(가) \quad f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$(나) \quad f(x) \text{와 } g(x) \text{의 최소공배수는 } x^3 - 7x + 6$$

이 때, $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수를 $G(x)$ 라 할 때, $G(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는

$$L(x) = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x-1)(x-2)(x+3) \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $G(x)$ 이므로

$$f(x) = G(x)A(x), \quad g(x) = G(x)B(x)$$

$A(x)$, $B(x)$ 는 서로소라 하면

$$f(x) + g(x) = G(x)A(x) + G(x)B(x)$$

$$= G(x)\{A(x) + B(x)\} \text{이므로}$$

$f(x) + g(x)$ 는 $G(x)$ 를 인수로 갖는다.

$$f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$$

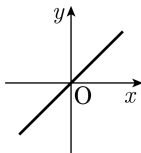
$$= 2(x-2)(x+1) \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $G(x) = x-2$

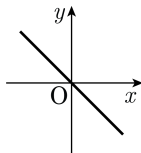
$$\therefore G(2) = 0$$

8. $(3 + 2i)z$ 가 실수가 되도록 하는 복소수 $z = x + yi$ 를 점 (x, y) 로 나타낼 때, 점 (x, y) 는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y 는 실수)

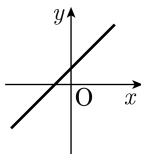
①



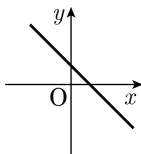
②



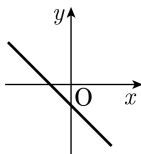
③



④



⑤



해설

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(x + yi) &= 3x + 3yi + 2xi - 2y \\ &= (3x - 2y) + (2x + 3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x + 3y = 0$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x$$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

9. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

10. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a \end{aligned}$$

$x^2+8x=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (A+7)(A+15)+a \\ &= A^2+22A+105+a \\ &= (A+11)^2-16+a \end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

11. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형

② 직각삼각형

③ 이등변삼각형

④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$$

$$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$$

$$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a+b \neq 0)$$

$$c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$\therefore C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

12. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.

($\because AB = GL$)

i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$

이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$

이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 2x$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 9x - 9$ 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

- ① -32 ② -24 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b 는 서로소)

$$f(x) + g(x) = G(a + b) = 2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$$

$$\text{최소공배수 } Gab = x^3 + x^2 - 9x - 9$$

$$= (x + 1)(x + 3)(x - 3)$$

이상에서 $G = x + 1$ 이고 $ab = (x - 3)(x + 3)$

$$\text{따라서 } f(x)g(x) = G^2ab = (x + 1)^2(x + 3)(x - 3)$$

$$\therefore f(1)g(1) = -32$$

14. $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)일 때, $\alpha^t = b + ai$ 라 한다.

$\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $2 + i$

④ $2 - i$

⑤ $\sqrt{3} + i$

해설

$\alpha = a + bi$, $\alpha^t = b + ai$ 이므로

$$\alpha\alpha^t = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

그런데 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a + bi$ 에서

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\alpha^t = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)i = i$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3} + i$$

15. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3 + 3w^2 + 4w} = aw + b$ 를 만족하는 실수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ 2

④ 1

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w (허근) 라 하고, $w^2 + w + 1 = 0$ 에서 양변에 $w - 1$ 을 곱하면,

$$w^3 - 1 = 0 \quad \therefore w^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2w^3 + 3w^2 + 4w} &= \frac{1}{3w^2 + 4w + 2} \\ &= \frac{1}{3(w^2 + w + 1) + w - 1} \\ &= \frac{w - 1}{w + 2} \\ &= \frac{(w - 1)(w + 2)}{w + 2} \\ &= \frac{w^2 + w - 2}{w + 2} \\ &= \frac{-3}{\frac{1}{3}w - \frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} = aw + b \text{ 에서}$$

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3} \quad \therefore a + b = -1$$

16. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2 - 1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x+1)(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

17. $f(x)$ 는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나누면 나머지는 $x+1$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 x^2 으로 나눌 때, 나머지는?

① $x + \frac{1}{3}$

② $x + \frac{1}{2}$

③ $\frac{x}{3} + 1$

④ $\frac{x}{2} + 1$

⑤ $\frac{x}{5} + 1$

해설

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = x^2 Q(x) + ax + b$$

$$\{f(x)\}^3 = \{x^2 Q(x) + ax + b\}^3$$

이것을 $x^2 P(x) + (ax + b)^3$ 이라 하면

$\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지는

$(ax + b)^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지와 같으므로

$$(ax + b)^3 = a^3 x^3 + 3a^2 b x^2 + 3ab^2 x + b^3 \text{에서}$$

$$3ab^2 x + b^3 = x + 1$$

$$\therefore 3ab^2 = 1, b^3 = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}, b = 1$$

$$\therefore ax + b = \frac{x}{3} + 1$$

18. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

19. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a + b$

② $b + c$

③ $a + c$

④ $a^2 + ab + bc + ca$

⑤ $a^2 + 2ab + b^2$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \{(a + b + c)^3 - a^3\} - (b^3 + c^3) \\&= (a + b + c - a)\{(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2\} \\&\quad - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\&= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) \\&= 3(b + c)(a^2 + ab + bc + ca) \\&= 3(b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\} \\&= 3(a + b)(b + c)(c + a)\end{aligned}$$

20. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
 &= 0 (\because a+b+c=0) \\
 &\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\
 &\therefore (\text{준식}) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\
 &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0
 \end{aligned}$$