1. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

2. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$
④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

3. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

4. 일차식 $f(x)$와 이차식 $g(x)$의 최대공약수는 $x+1$이고, 두 식의 곱은 $f(x)g(x)=x^3-x^2+ax+b$일 때, ab의 값은?

① 0　② 5　③ 10　④ 15　⑤ 20

해설

최대공약수가 $x+1$이고 두 식의 곱이 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x+1,\ g(x)=(x+1)(x+c)$
$f(x)g(x)=(x+1)(x+1)(x+c)$
$=x^3+(c+2)x^2+(2c+1)x+c$
$=x^3-x^2+ax+b$
계수를 비교하면 $c+2=-1,\ 2c+1=a,\ b=c$
$\therefore\ c=-3,\ a=-5,\ b=-3$
$\therefore\ ab=15$

해설

$f(x)g(x)=x^3-x^2+ax+b$는 $x+1$로 두 번 나누어 떨어진다.
조립제법으로 나누어 보면
$-a+b-2=0, a+5=0$
$\therefore\ a=-5,\ b=-3$이므로 $ab=15$

5. 다항식 M 이 두 다항식 A, B 의 공약수라 할 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① M 은 $A - B$ 의 약수이다.

② M 은 A, $A + B$ 의 공약수이다.

③ M 은 $A + B$ 의 약수이다.

④ M^2 은 $AB + B^2$ 의 약수이다.

⑤ M^2 은 $AB - B$ 의 약수이다.

해설

$A = MP, B = MQ$ 라 하자.
① $A - B = M(P - Q)$ (참)
② $A = MP, A + B = M(P + Q)$ (참)
③ $A + B = M(P + Q)$ (참)
④ $AB + B^2 = M^2(PQ + Q^2)$ (참)
⑤ $AB - B = M(MPQ - Q)$ (거짓)

6. 다항식 $f(x)=x^4+ax^2+x+2$를 $g(x)=x^3+bx+2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x+2$일 때, ab의 값은?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$에서
$g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수 $x+2$는
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2)=16+4a=0, a=-4$
$g(-2)=-8-2b+2=0, b=-3$
$\therefore\ ab=12$

7. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

8. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a\neq 2$, $\therefore$ $a=-4$

9. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$ ② $-1-i$ ③ 0

④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$

$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$

$=\frac{1}{i}-1=-i-1$

10. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개

④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(ⅰ) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ⅱ) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(ⅲ) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(ⅳ) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(ⅴ) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ), (ⅴ)에서 x의 개수는 4개

11. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

12. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 α, β라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$　　② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$　　④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$

$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x - 1 = 0$, 또는 $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ \alpha\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
$\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$의 값을 구해도 된다.

13. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$ ④ 2ω ⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$
$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$

14. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-12 \geq x-6 \\ 5x-a \leq 4x+2 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수가 2 개일 때, 정수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x-12 \geq x-6$ 을 풀면 $2x \geq 6$, $x \geq 3$
$5x-a \leq 4x+2$ 를 풀면 $x \leq a+2$
따라서 $3 \leq x \leq a+2$ 이고, 만족하는 정수의 개수가 2 개가 되려면
$4 \leq a+2 < 5$ 이므로 $2 \leq a < 3$, 따라서 정수 a 의 값은 2 이다.

15. 연립부등식 $\begin{cases} -4x - 15 \leq 1 \\ 3x + a < x \end{cases}$ 의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해는 $-4 \leq x < 4$ 이다.

$-4x - 15 \leq 1$

$-4x \leq 16$

$x \geq -4$ 이므로

$3x + a < x$ 의 해는 $x < 4$ 이다.

$2x < -a, \ \ x < -\dfrac{a}{2}$

$-\dfrac{a}{2} = 4 \ \ \therefore \ \ a = -8$

16. 연립부등식 $\begin{cases} x-4>5 \\ 3x-2<a \end{cases}$ 의 해가 $9<x<14$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$x-4>5$

$x>9$

$3x-2<a$

$3x<a+2$

$x<\dfrac{a+2}{3}$

$9<x<\dfrac{a+2}{3}$ 가 $9<x<14$ 이므로

$\dfrac{a+2}{3}=14$

$a+2=42$

$\therefore \ a=40$

17. 연속하는 세 자연수의 합이 69 보다 크고 72 이하일 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

▷ 정답 : 25

해설

세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라하면

$69 < x-1+x+x+1 \le 72$

$69 < 3x \le 72$

$23 < x \le 24$

$\therefore \ x = 24$

따라서 연속하는 세 자연수는 23, 24, 25 이다.

18. 장미꽃을 포장하는데 3송이 씩 묶으면 2송이가 남고, 5송이 씩 묶으면 3송이 씩 묶을 때보다 3 묶음 줄어든다. 장미꽃은 몇 송이인지 구하여라.(정답 2개)

▶ 답 : ______ 송이

▶ 답 : ______ 송이

▷ 정답 : 23 송이

▷ 정답 : 26 송이

해설

장미꽃의 묶음의 수를 x묶음이라 하면
장미꽃은 $(3x+2)$ 송이이다.
$5(x-3) \le 3x+2 \le 5(x-3)+4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x-3) \le 3x+2 \\ 3x+2 \le 5(x-3)+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 17 \\ -2x \le -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{17}{2} \\ x \ge \frac{13}{2} \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{13}{2} \le x \le \frac{17}{2}$

따라서 $x = 7, 8$ 이므로 $3 \times 7 + 2 = 23$ (송이) 또는 $3 \times 8 + 2 = 26$ (송이) 이다.

19. 이차함수 $y = x^2 - ax + 4$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

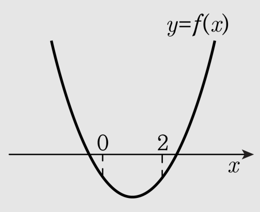
$x^2 - ax + 4 > x - 2$ 에서 $x^2 - (a+1)x + 6 > 0$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, 해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-2)(x-3) > 0$
$\therefore x^2 - 5x + 6 > 0$ $\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡이 일치하므로 $a + 1 = 5$
$\therefore a = 4$

20. 부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되어야하므로
$0 \le x \le 2$ 에서
$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.
$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면
$0 \le x \le 2$ 에서
$f(x) \le 0$ 이어야 하므로
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.
$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서
$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서
$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$
따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로
$M - m = 2$



21. 두 부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$, $|x| < |a|$의 해가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$|x| < |a|$ 에서 양변을 제곱하면
$x^2 < a^2$ 이므로
$x^2 - a^2 < 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $a(a < 0)$ 를 곱하면
$ax^2 - a^3 > 0$ 이고
이것이 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 과
일치해야 하므로
$a^2 - 1 = 0, b = -a^3$
$\therefore a = -1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 0$

22. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 2+$ ③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

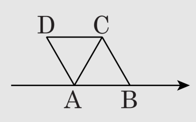
23. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D 에 대한 설명이다. 점 A, B, C, D 의 x좌표를 각각 a, b, c, d 라고 할 때 옳은 것은?

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$	$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{CD}}$

① $a < b < c < d$
② $c < d < a < b$
③ $d < a < c < b$
④ $d < a < c < b$
⑤ $d < c < a < b$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 에서
$\triangle$ABC 는 정삼각형
$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{CD}}$ 에서
$\triangle$ACD 는 정삼각형
따라서, C 와 D 는 다음 그림과 같은 위치에 있다.



따라서, $d < a < c < b$

24. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24　② -18　③ -12　④ 9　⑤ 21

해설

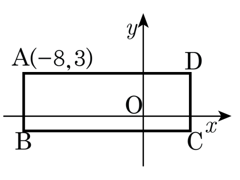
$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C=90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right)=(3,-2)$

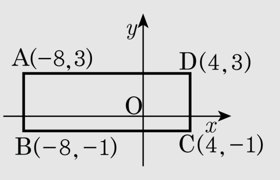
$\therefore\ 3ab=-18$

25. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 A$(-8,\ 3)$, B, C, D를 꼭지점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이는 32이고, 가로의 길이는 세로 길이의 세 배일 때, 점 B 와 D 를 지나는 직선의 방정식은? (단, 각 변은 축에 평행하다.)



① $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$　② $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$　③ $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
④ $y = \frac{1}{4}x + \frac{4}{3}$　⑤ $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}$

해설



세로의 길이가 a라 하면 가로의 길이는 $3a$이다.
$8a = 32$에서 $a = 4$
가로의 길이는 12, 세로의 길이는 4이므로
D$(4,3)$이고, 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
따라서 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{3}(x-4)+3$
따라서 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

26. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

27. 두 직선 $ax+by+1=0$과 $a'x+b'y+2=0$의 교점을 지나는 직선이 원점을 통과하고 기울기가 -1일 때, $\dfrac{a'-b'}{a-b}$의 값을 구하면?(단, $a \neq b,\ 2b \neq b'$이다.)

① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

$ax+by+1+k(a'x+b'y+2)=0$이
원점을 지나므로 $1+2k=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $ax+by+1-\dfrac{1}{2}(a'x+b'y+2)=0$

$\rightarrow (2a-a')x+(2b-b')y=0$

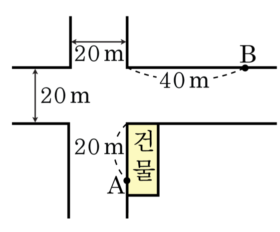
$y=-\dfrac{2a-a'}{2b-b'}x$

$\therefore\ -\dfrac{2a-a'}{2b-b'}=-1$

따라서 $2a-a'=2b-b' \rightarrow 2(a-b)=a'-b'$

$\therefore\ \dfrac{a'-b'}{a-b}=2$

28. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

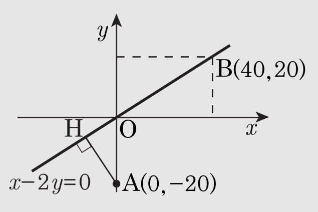


① $2\sqrt{10}$　② $4\sqrt{10}$　③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$　⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0,-20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$



사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$

29. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$을
지나므로 차례로 대입하면

$$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots ㉠$$
$$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots ㉡$$
$$9-3B+C=0 \quad \cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-6, B=-2, C=-15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

30. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2=4, \quad y=x+3$

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 $y=x+3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d=\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d=\frac{3\sqrt{2}}{2}>2=r$

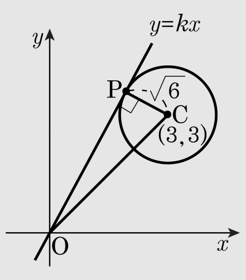
이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

31. $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설



$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 은 중심이$(3,3)$,
반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$\mathrm{P}(x,y)$ 에 대하여
$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x}=k$, $y=kx$ 이므로
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y=kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면
$kx-y=0$ 에서 중심 $(3,\ 3)$ 까지의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.
$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6}$, $k^2-6k+1=0$
$k=3\pm2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

32. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

33. 점 $(1, -2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -4x + 2$ ② $y = 4x + 2$ ③ $y = -4x + 4$
④ $y = 4x + 4$ ⑤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
$y + 2 = m(x - 1)$ $\cdots$①이라 하면
①식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
$x \to 4 - x$ $y \to 6 - y$이므로
$6 - y + 2 = m(4 - x - 1)$, $y = m(x - 3) + 8 \cdots$②
직선 ②를 x축에 대칭이동하면
$-y = m(x - 3) + 8$ $\cdots$③
직선 ③이 점 $(4, -4)$를 지나므로
$4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$
따라서 처음 직선의 방정식 ①은
$y + 2 = -4(x - 1)$, $y = -4x + 2$