

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. $4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 의 중심의 좌표 C 와 반지름 r 을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

② $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 4$

③ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 4$

④ $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

⑤ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 2$

해설

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 를 정리하면

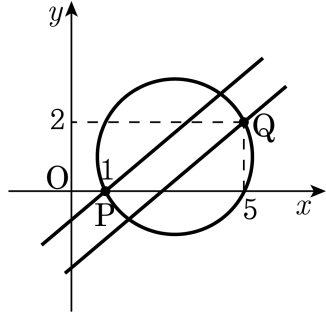
$$x^2 + y^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이며

반지름은 2이다.

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3 등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.

따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$ 의 중점 C(3, 1)이므로,

$$r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ 이다.}$$

4. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 연립방정식은
 $26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 연립방정식을 풀면
 $A = -2$, $B = 0$, $C = -24 \cdots \textcircled{5}$

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

i) $\textcircled{A}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} a^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 &= r^2 \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

ii) $\textcircled{A}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 &= r^2 \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{C} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{B} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

6. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$ ② $c < 2$ ③ $c < 3$ ④ $c < 4$ ⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

7. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$

② $k > -5$

③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$

⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k+5$$

이 때, $k+5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

8. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

9. x, y 에 대한 이차방정식 $2x^2 + py^2 + qxy - 6x + 8y + 2r = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p > 1, q = 0, r < 6$

② $p = \frac{7}{9}, q < 0, r < \frac{2}{3}$

③ $p < 9, q = 0, r < \frac{19}{5}$

④ $p = 2, q = 0, r < \frac{25}{4}$

⑤ $p > 1, q < \frac{8}{11}, r < \frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
 x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로

$$p = 2, q = 0$$

따라서, 주어진 방정식은

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 2r = 0$$

이 때, 양변을 2 로 나누면

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + r = 0$$

이 식을 변형하면

$$\left\{ x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\} + (y^2 + 4y + 4)$$

$$= -r + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 4$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + (y + 2)^2 = -r + \frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r + \frac{25}{4} > 0$$

$$\therefore r < \frac{25}{4}$$

10. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

11. 점 $(2, 1)$, $(4, -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면
 y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
 $r = |a|$ 이다.
 $\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
 $\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로
 $(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
 $b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} \times 2 - \textcircled{C}$ 에서 $b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$
 $\therefore b = -1, 7$
이때, $\textcircled{B}$ 에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
 $\therefore r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

12. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

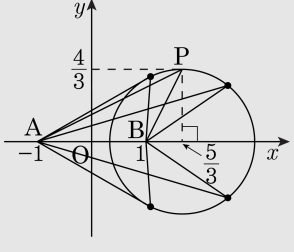
13. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, ΔPAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면
 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로
 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$
 $\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$
 $(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$
 $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$
 $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, ΔPAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.
즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 ΔPAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,
넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



14. 두 점 A(0, 0), B(3, 3)에 대하여 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \geq 2$ 가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

- ① 8π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 4π ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ 16π

해설

점 P를 (x, y)라 하면 $\overline{AP} \geq 2\overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 \geq 4(x-3)^2 + 4(y-3)^2$

$$\therefore x^2 - 8x + y^2 - 8y + 24 \leq 0$$

$$\text{즉, } (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 8$$

따라서 구하는 자취는 중심이 (4, 4) 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.

그러므로 구하는 넓이는 8π 이다.

15. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 90° 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

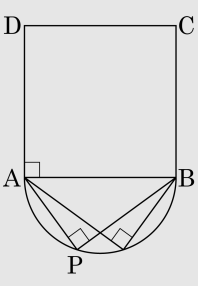
- ① πa
- ② $\sqrt{2}\pi a$
- ③ $2\pi a$
- ④ $2\sqrt{2}\pi a$
- ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 90° 되는점
점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$$



16. 두 원 O_1 , O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1 , r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치에 관계에 있는가?

- ① 외접한다.
- ② 내접한다.
- ③ 두 점에서 만난다.
- ④ 만나지 않는다.
- ⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

17. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 25 = 0$ 에 외접하고 점 $(-3, 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 25 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 1 \dots\dots\textcircled{A}$$

또, 이 원에 외접하고 점 $(-3, 0)$ 에서

x 축에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$(x-3)^2 + (y-r)^2 = r^2 \dots\dots\textcircled{B}$$

이 때, 두 원 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 은 서로 외접하므로

$$\sqrt{\{1 - (-3)\}^2 + \{5 - r\}^2} = r + 1$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$r^2 - 10r + 41 = r^2 + 2r + 1$$

$$12r = 40$$

$$\therefore r = \frac{10}{3}$$

18. 두 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 \leftarrow \text{중심 } (3, 4)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \leftarrow \text{중심 } (0, 0)$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이다.

이 때, $|r-3| = 5$ 이어야 하므로 $r-3 = \pm 5$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

19. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$$

$$\Rightarrow a = 4$$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

21. 다음 두 원이 접할 때, a 의 값이 될 수 있는 것은?

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2ay + 1 = 0$$

- ① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2} - 1$
- ④ $-1 + \sqrt{3}$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}$

해설

$(x - a)^2 + (y - 1)^2 = a^2$,
 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = a^2$ 이므로,
두 원의 중심은 각각 $(a, 1)$, $(1, a)$ 이고,
반지름은 둘 다 a ($\because a > 0$)이다.
 $\sqrt{(a - 1)^2 + (1 - a)^2} = 2a$
 $\therefore 2(a - 1)^2 = 4a^2$
 $\therefore a^2 + 2a - 1 = 0$
 $\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$

22. 두 원 $x^2 + y^2 = 2$ 과 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2$ 이 만나지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위는 $a < p$ 또는 $a > q$ 이다. 이때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 2$, $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2$ 는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$ 이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, (a, a) 이므로 중심거리는 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}|a|$
따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면 $\sqrt{2}|a| > \sqrt{2} + \sqrt{2}$, $|a| > 2$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

23. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
 $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$
연립하여 풀면 $(x,y) = (-3,-2), (1,-2)$
그러므로 $(a,b) = (-3,-2)$

24. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

25. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$
 $4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$
 $\therefore a = -4, b = -1$
 $\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$

26. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 방정식은

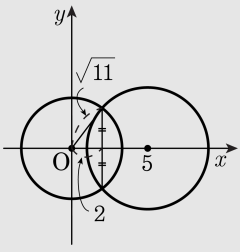
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



27. 원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6) - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$
 $2(a - 1)x + 2(a + 1)y - 4 = 0$
 $\therefore (a - 1)x + (a + 1)y - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$
또, 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면,
 $(x + 1)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1, a)$ 이다. 이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이
점 $(-1, a)$ 를 지나야 하므로 $-(a - 1) + a(a + 1) - 2 = 0$
 $a^2 - 1 = 0,$
 $\therefore a^2 = 1$

28. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

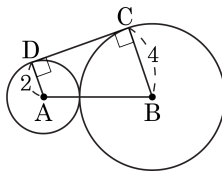
$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

29. 다음 그림과 같이 서로 외접하는 두 원 A 와 B 의 반지름의 길이는 각각 2 와 4 이다. 두 원과 공통외접선의 교점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하면?



- ① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
 ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

해설

피타고라스의 정리에 의하여 변 CD 의 길이는

$$\sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\frac{(2 + 4)4\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

30. 두 점 A(-2, 2), B(2, 2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 (2, 1), (0, 3)을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A(-2, 2) B(2, 2) 의 중점은 원의 중심이므로,

$$\text{중점 } O = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (0, 2)$$

반지름의 길이 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 (0, a) 라고 하면

두 점 (2, 1), (0, 3) 과의 거리가 각각 같

으므로,

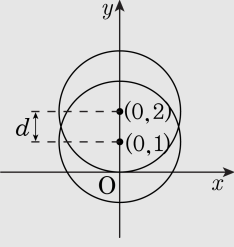
$$(0-2)^2 + (a-1)^2 = (0-0)^2 + (a-3)^2$$

$$\therefore a = 1$$

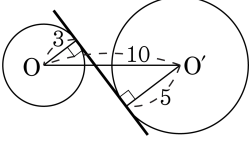
반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와

같으므로 $2 - 1 = 1$



31. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



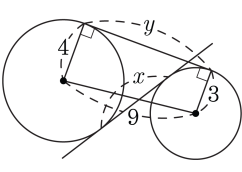
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

32. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설

$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$
$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

33. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$
 $\therefore a^2 - 3a = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3