1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y-1)^2=5$

② $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$

③ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

④ $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=5$

2. $4x^2+4y^2-20x+9=0$의 중심의 좌표 C와 반지름 r을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=2$　② $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=4$

③ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r=4$　④ $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=2$

⑤ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r=2$

해설

$4x^2+4y^2-20x+9=0$를 정리하면

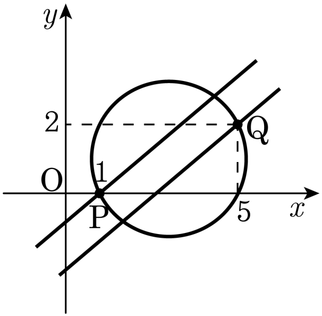
$x^2+y^2-5x+\frac{9}{4}=0$

$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이며

반지름은 2이다.

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 C(3, 1)이므로,
$r^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

4. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$일 때, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉠으로 놓으면

㉠은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$을 지나므로 연립방정식은

$26 + \mathrm{A} + 5\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉡

$20 - 2\mathrm{A} + 4\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉢

$34 + 5\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 연립방정식을 풀면

$\mathrm{A} = -2,\ \mathrm{B} = 0,\ \mathrm{C} = -24 \cdots$ ㉤

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2 \ \cdots\cdots ㉠$
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \cdots\cdots ㉡$
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \ \cdots\cdots ㉢$
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}\quad (\because\ r > 0)$

6. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$　② $c<2$　③ $c<3$　④ $c<4$　⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=5-c$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$$

$$\therefore c<5$$

7. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$　　② $k > -5$　　③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$　　⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$

이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

8. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$

② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$

④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

9. x, y에 대한 이차방정식 $2x^2+py^2+qxy-6x+8y+2r=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p>1,\ q=0,\ r<6$

② $p=\frac{7}{9},\ q<0,\ r<\frac{2}{3}$

③ $p<9,\ q=0,\ r<\frac{19}{5}$

④ $p=2,\ q=0,\ r<\frac{25}{4}$

⑤ $p>1,\ q<\frac{8}{11},\ r<\frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면

x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로

$p=2,\ q=0$

따라서, 주어진 방정식은

$2x^2+2y^2-6x+8y+2r=0$

이 때, 양변을 2 로 나누면

$x^2+y^2-3x+4y+r=0$

이 식을 변형하면

$$\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\left(y^2+4y+4\right)$$

$$=-r+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=-r+\frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r+\frac{25}{4}>0$$

$$\therefore r<\frac{25}{4}$$

10. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2+(y-a)^2 &= 2a^2-8a+15\\ &= 2(a-2)^2+7\\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

11. 점 $(2,\ 1),\ (4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2,\ b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

12. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

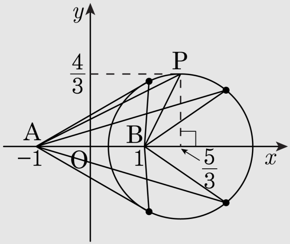
해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

13. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

14. 두 점 A(0, 0), B(3, 3)에 대하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} \geq 2$ 가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

① 8π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 4π ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ 16π

해설

점 P를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} \geq 2\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{x^2+y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

양변을 제곱하면 $x^2+y^2 \geq 4(x-3)^2+4(y-3)^2$

$\therefore\ x^2-8x+y^2-8y+24 \leq 0$

즉, $(x-4)^2+(y-4)^2 \leq 8$

따라서 구하는 자취는 중심이 $(4,\ 4)$ 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.

그러므로 구하는 넓이는 8π 이다.

15. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$

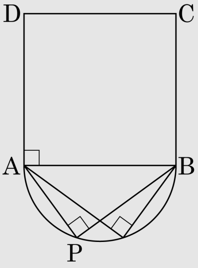
④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$2\times\left(2\pi\frac{a}{2}\right)=4\pi\left(\frac{a}{2}\right)=2\pi a$



16. 두 원 O_1, O_2 의 중심거리가 $d = 7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다. ② 내접한다.

③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.

⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

17. 원 $x^2+y^2-2x-10y+25=0$ 에 외접하고 점 $(-3,0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$x^2+y^2-2x-10y+25=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y-5)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 원에 외접하고 점 $(-3,0)$ 에서
x 축에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
$(x-3)^2+(y-r)^2=r^2 \cdots\cdots$ ㉡
이 때, 두 원 ㉠, ㉡은 서로 외접하므로
$\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(5-r)^2}=r+1$
위의 식의 양변을 제곱하면
$r^2-10r+41=r^2+2r+1$
$12r=40$
$\therefore r=\frac{10}{3}$

18. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

두 원을
$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2 : x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

19. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow\quad x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25,\quad x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow\quad a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow\quad a=4$

20. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

21. 다음 두 원이 접할 때, a의 값이 될 수 있는 것은?

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2ay + 1 = 0$$

① 1　② 2　③ $2\sqrt{2} - 1$

④ $-1 + \sqrt{3}$　⑤ $-1 + \sqrt{2}$

해설

$(x-a)^2 + (y-1)^2 = a^2$,

$(x-1)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 이므로,

두 원의 중심은 각각 $(a,\ 1)$, $(1,\ a)$이고,

반지름은 둘 다 $a(\because\ a > 0)$이다.

$\sqrt{(a-1)^2 + (1-a)^2} = 2a$

$\therefore\ 2(a-1)^2 = 4a^2$

$\therefore\ a^2 + 2a - 1 = 0$

$\therefore\ a = -1 \pm \sqrt{2}$

22. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

23. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

24. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$

교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$

의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로

$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$

$\therefore m=-2$

이 값을 대입하고 정리하면

$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.

$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$

그러므로 $A+B-C=10$

25. 두 원 $(x-2)^2+y^2=10$, $x^2+y^2+y-5=0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$(x-2)^2+y^2=10$ 에서
$x^2+y^2-4x-6=0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$
$4x+y+1=0, y=-4x-1$
$\therefore a=-4, b=-1$
$\therefore a+b=-4+(-1)=-5$

26. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{11}$　③ 5　④ $2\sqrt{7}$　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

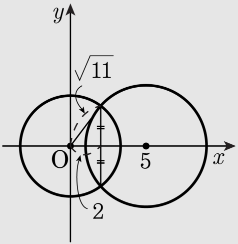
$(x^2+y^2-11)-(x^2-10x+y^2+9)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$

원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$



27. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0 \ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0,$
$\therefore\ a^2=1$

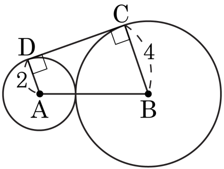
28. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

29. 다음 그림과 같이 서로 외접하는 두 원 A 와 B 의 반지름의 길이는 각각 2 와 4 이다. 두 원과 공통외접선의 교점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하면?



① $8\sqrt{2}$　② $10\sqrt{2}$　③ $12\sqrt{2}$　④ $16\sqrt{2}$　⑤ $18\sqrt{2}$

해설

피타고라스의 정리에 의하여 변 CD 의 길이는
$\sqrt{6^2-2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
따라서 사각형 ABCD 의 넓이는
$\dfrac{(2+4)4\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ 이다.

30. 두 점 $A(-2,\ 2)$, $B(2,\ 2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$A(-2,\ 2)$ $B(2,\ 2)$ 의 중점은 원의 중심이므로,

중점 $O = \left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{2+2}{2}\right) = (0,\ 2)$

반지름의 길이 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2+0} = 2$

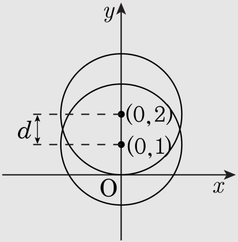
중심이 y 축에 있으므로 $(0,\ a)$ 라고 하면 두점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 과의 거리가 각각 같으므로,

$(0-2)^2+(a-1)^2 = (0-0)^2+(a-3)^2$

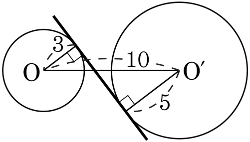
$\therefore a = 1$

반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와 같으므로 $2-1=1$



31. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



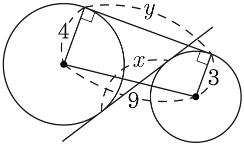
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

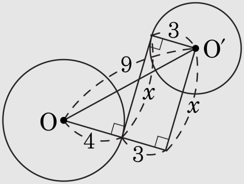
32. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.



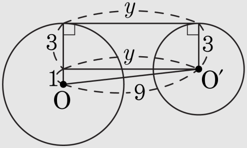
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2=(4+3)^2+x^2 \quad \therefore \; x^2=9^2-7^2$



$9^2=y^2+(4-3)^2 \quad \therefore \; y^2=9^2-1^2$

$\therefore \; x^2+y^2=2\cdot 9^2-7^2-1^2 \; =112$

33. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3