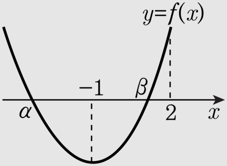
1. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$

④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0,\ f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1-2a+a^2-1 < 0$ 에서 $a^2-2a < 0,\ a(a-2) < 0$

$\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0,\ (a+3)(a+1) > 0$

$\therefore a < -3,\ a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

2. x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 이고, 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선이 점 $(a,\ 7)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

x 축 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 인 직선의 기울기는 1 이다.

$(-1,\ 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식은

$y=(x+1)+2=x+3$

$(a, 7)$ 을 대입하면, $7=a+3,\quad a=4$

3. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점을 P, $3 : 2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1} = 3 \text{에서 } P(3)$$

$$\frac{3 \times 6 - 2 \times (-3)}{3-2} = 24 \text{에서 } Q(24)$$

$$\therefore \overline{PQ} = |24 - 3| = 21$$

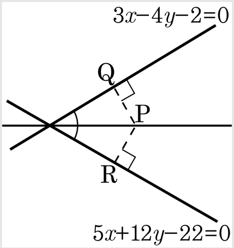
4. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

5. 좌표평면 위의 점 A $(1,\ 2)$ 에서 x축 위의 점 P를 지나 점 B $(5,\ 1)$ 를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

점 A를 x축에 대해 대칭시키는
새로운 점 A′ $(1, -2)$ 에 대해
선분 A′B의 거리를 구하면 된다.
$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$

6. 두 직선 $x+y-1=0$, $2x-y+7=0$ 의 교점을 지나고 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$
이 점을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x+2)+3$
원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$\Rightarrow \quad (2m+3)^2=4(m^2+1)$$

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{5}{12} \quad \cdots \quad \text{기울기}$$

7. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2 - x + k = 0$의 한 근만이 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위는?

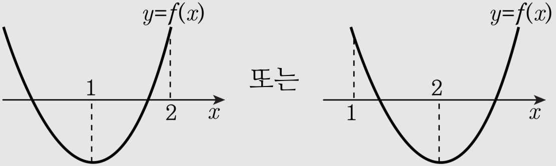
① $1 < k < 2$
② $-2 < k < 0$
③ $-2 \le k \le 0$
④ $k < -2$ 또는 $k > 0$
⑤ $-2 < k < -1$

해설

$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 - x + k$ 로 놓으면 다음 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이에서 x 축과 만나야 한다.



$\therefore f(1) < 0,\ f(2) > 0$ 또는 $f(1) > 0,\ f(2) < 0$

즉, $f(1)f(2) = k(k+2) < 0$

$\therefore -2 < k < 0$

9. 점 (0, 2) 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 30° 인 직선의 방정식은?

① $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2$　② $y = x + 2$　③ $y = 2x + 2$

④ $y = x + 3$　⑤ $y = x + 4$

해설

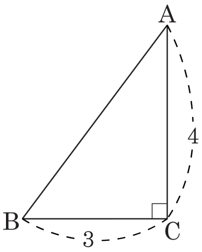
기울기 $m = \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

점 (0, 2) 를 지나므로,

$$y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

$$\therefore\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

10. 다음 그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\overline{AC}=4$ 인 직각삼각형이 있다. 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2$ 의 값은?



① 125 ② 200 ③ 250

④ 325 ⑤ 450

해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는
각각 A$(0,4)$, B$(-3,0)$이다.
따라서 선분 AB를 $2:3$으로
외분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times(-3)-3\times0}{2-3}, \frac{2\times0-3\times4}{2-3}\right)$$

$=\mathrm{P}(6,12)$

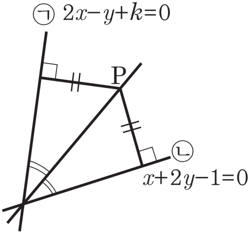
선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times4}{3-2}\right)$$

$=\mathrm{Q}(-9,\ -8)$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2 &= (6^2+12^2)+(9^2+8^2)\\ &= 325\end{aligned}$$

11. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6

④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \quad \cdots$ ㉡

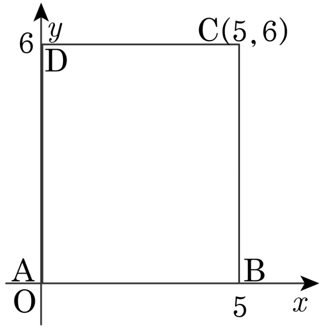
(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

12. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$ 이루어져 있다. $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P 의 좌표는?

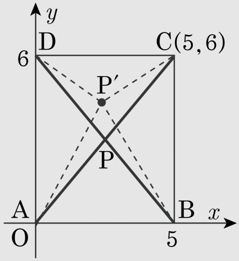


① $\left(\frac{5}{2},0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},3\right)$ ③ $(0,3)$

④ $(5,0)$ ⑤ $(0,6)$

해설

그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을 P 라 하고, 임의의 점P′ 을 잡으면 $\overline{P'A}+\overline{P'C} >= \overline{AC} = \overline{PA}+\overline{PC}$ $\overline{P'B}+\overline{P'D} >= \overline{BD} = \overline{PB}+\overline{PD}$ $\therefore$ $\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$ $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 즉, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P 는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2},3\right)$ 이다.



13. 원점 O 에서 직선 $ax - y + 4 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 한다. 선분 OH 의 길이가 2 가 될 때, a^2 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

선분 OH 는 원점과 직선 $ax - y + 4 = 0$ 간의 최단거리이므로,

$$\frac{|4|}{\sqrt{a^2+1}} = \overline{OH} = 2$$

$$\sqrt{a^2+1} = 2$$

$$a^2 + 1 = 4$$

$$\therefore\ a^2 = 3$$

14. 두 정점 A(1, 2), B(−3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=2x-1$ ③ $y=-2x+1$
④ $y=-2x-1$ ⑤ $y=-x+2$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
$-8x-4y-4=0,\ -4y=8x+4$
$\therefore\ y=-2x-1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점$(-1,\ 1)$ 을 지난다.
$\therefore\ y-1=-2(x+1)$
$\therefore\ y=-2x-1$