

1. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 1

④ 2

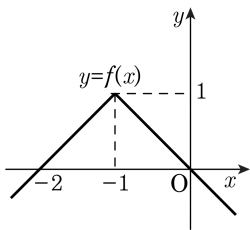
⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$

따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

2. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x - 1| - 1$

② $y = |x + 1| - 1$

③ $y = |x - 1| + 1$

④ $y = -|x + 1| + 1$

⑤ $y = -|x + 1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$y = -|x|$ 에 x 대신 $x + 1$,

y 대신 $y - 1$ 을 대입하면 $y - 1 = -|x + 1|$

즉, $f(x) = -|x + 1| + 1$ 이므로 $y = -|x + 1| + 1$

3. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2
 \end{aligned}$$

4. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

5. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = |x - 2| + kx - 5$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 k 의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$

② $-1 < k < 1$

③ $k < 1$

④ $k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k + 1)x - 7$

$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k - 1)x - 3$

그런데 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

따라서, $(k + 1)(k - 1) > 0$ 이므로

$k < -1$ 또는 $k > 1$

7. 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = -2x + 1$ 일 때, $(f \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

③ $y = \frac{1}{2}x$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

해설

$$(g^{-1})(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

8. 함수 $y = (x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \sqrt{x-1} + 2 (x \geq 1)$

② $y = \sqrt{x+1} + 2 (x \geq -1)$

③ $y = -\sqrt{x+1} + 2 (x \geq -1)$

④ $y = -\sqrt{x+1} - 2 (x \geq -1)$

⑤ $y = -\sqrt{x-1} + 2 (x \geq 1)$

해설

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad (x \leq 2, y \geq -1)$$

$$\text{역함수 } x = (y-2)^2 - 1 \quad (y \leq 2, x \geq -1)$$

$$x+1 = (y-2)^2$$

$$y = 2 \pm \sqrt{x+1}$$

$$y \leq 2 \text{ 이므로, } y = -\sqrt{x+1} + 2$$

$$\therefore y = -\sqrt{x+1} + 2 \quad (x \geq -1)$$

9. 두 함수 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 2 - x$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(g \circ f)^{-1}(3) = a$ (a 는 상수) 라고 하면

$(g \circ f)(a) = 3$, 즉 $g(f(a)) = 3$

이 때, $f(x) = 2x - 3$ 에서 $f(a) = 2a - 3$ 이므로

$g(f(a)) = g(2a - 3) = 2 - (2a - 3) = -2a + 5$

따라서, $g(f(a)) = 3$ 에서 $-2a + 5 = 3 \quad \therefore a = 1$

$\therefore (g \circ f)^{-1}(3) = 1$

10. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x+2}{x}$ 일 때, $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 2$ 와 $(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = 2$ 를 만족하는 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b = -2$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, g(x) = \frac{x+2}{x} \text{ 일 때,}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = (g \circ f)^{-1}(a) = 2$$

$$\rightarrow (g \circ f)(2) = a$$

$$\therefore a = g\{f(2)\} = g(-1) = -1 \quad (\because f(2) = -1)$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = (f \circ g)^{-1}(b) = 2$$

$$\rightarrow (f \circ g)(2) = b$$

$$\therefore b = f\{g(2)\} = f(2) = -1 \quad (\because g(2) = 2)$$

$$\therefore a = -1, b = -1 \rightarrow a+b = -2$$

11. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하고, $g(0) = 5$ 라 한다. 또 $f(2x+1) = h(x)$ 라 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $l(x)$ 라 할 때, $l(0)$ 의 값은?

① 0

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$l(0) = k$ 라 하면 $h(k) = 0$, $f(2k+1) = h(k) = 0$

$f(5) = 0$, $2k+1 = 5$, $k = 2$

12. 함수 $f(x) = \sqrt{7-3x}$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(1)$ 의 값은?

①

1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f^{-1}(1) = a \text{라 하면 } f(a) = \sqrt{7-3a} = 1$$

$$7-3a = 1, a = 2$$

$$\therefore f^{-1}(1) = 2$$

$$\text{이때, } (f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(f^{-1}(1)) \\ = f^{-1}(2) \text{ 이므로}$$

$$f^{-1}(2) = b \text{라 하면 } f(b) = \sqrt{7-3b} = 2$$

$$7-3b = 4, b = 1$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(2) = 1$$

13. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 3

③ 6

④ 8

⑤ 11

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

15. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는

두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.

그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

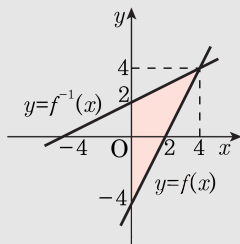
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.

함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$

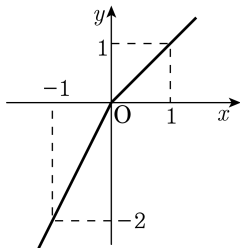
$$\therefore x = 4$$



따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로

그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

16. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(10) = f(f(10))$
 ㉡ $f^{-1}(-2) = -1$
 ㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(10) = 10$

$f(f(10)) = f(10) = 10$

$\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)

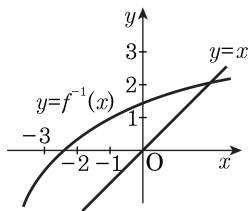
㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)

㉢ $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

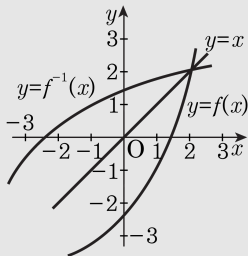
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

17. 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 해를 α 라고 할 때 다음 중 옳은 것을 고르면?



- ① $-3 < \alpha < -2$ ② $-2 < \alpha < -1$
 ③ $0 < \alpha < 1$ ④ $1 < \alpha < 2$
 ⑤ $2 < \alpha < 3$

해설



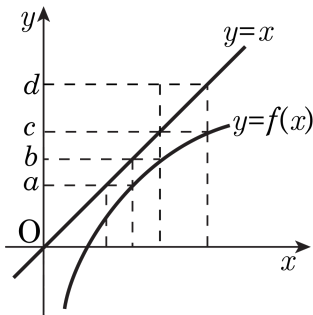
다음 그림에서와 같이

$y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭을 이룬다.

따라서 $f(x) = 0$ 의 해는 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표이므로

$1 < \alpha < 2$ 이다.

18. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$$f^{-1}(b) = k \text{ 라 하면 } f(k) = b$$

$$f(c) = b \text{ 이므로 } k = c$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(b) = c$$

19. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f = f^{-1} \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

$$f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0) \text{ 로 놓으면}$$

$$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$$

$$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$$

$$\text{즉, } a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0 \text{ 이므로 } a = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 4 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$$

20. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.

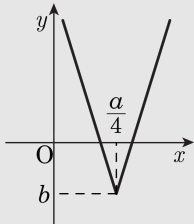
21. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

22. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는

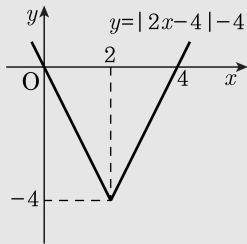
$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



23. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는

$x+2y=2$ 의 그래프에서

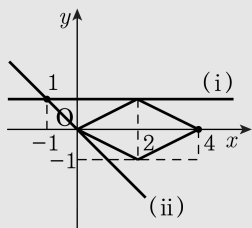
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한

것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

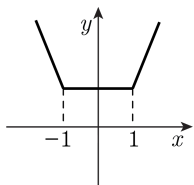
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

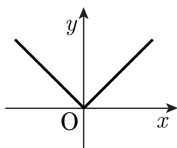
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

24. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?

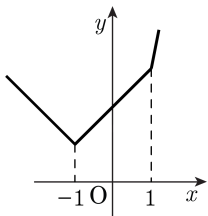
①



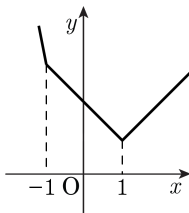
②



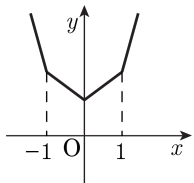
③



④



⑤



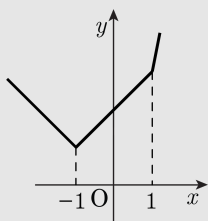
해설

$$\begin{aligned} \text{i) } x \leq -1 \text{ 일 때, } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x - (x + 1) \\ &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } -1 < x \leq 1 \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x + (x + 1) \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 1 < x \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= (x - 1) + x + (x + 1) \\ &= 3x \end{aligned}$$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



25. 수직선 위에 세 점 $A(-2)$, $B(1)$, $C(2)$ 가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① $P(-2)$

② $P(-1)$

③ $P(0)$

④ $P(1)$

⑤ $P(2)$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

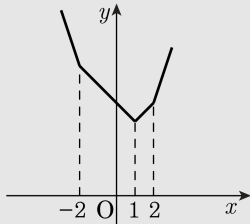
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$$

$y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $P(1)$
이다.



26. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \leq x \leq 2$) 의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1 \quad \therefore y = x + 1$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0 \quad \therefore y = x$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1 \quad \therefore y = x - 1$

$x = 2$ 일 때, $[x] = 2 \quad \therefore y = 0$

따라서, $y = x - [x]$ ($-1 \leq x \leq 2$) 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

27. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$ 따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4, f(x) \text{는 정수}\}$ 이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1, x_2 = 3$ 일 때

$$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$$

$$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0 \text{ 이므로}$$

$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

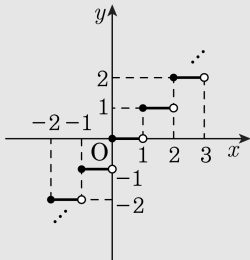
이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

28. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.
- ② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.
- ③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.
- ④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.
- ⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

29. $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ 를 풀면?

① 6

② 8

③ $\frac{31}{2}$

④ 24

⑤ 512

해설

분자, 분모에 2^3 을 곱하면

$$\frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^3(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4})} = \frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}$$

$$= 2^3 = 8$$

해설

$$\frac{2 + 1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{16}} = 8$$

30. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{11}{20}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

31. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$

② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$

③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$

④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$

⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$$

32. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y) \{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

33. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

① $\frac{x}{x+1}$

② $\frac{x+1}{x-1}$

③ 1

④ $x - \frac{1}{x}$

⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

34. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(1) = 1, f(5) = 3$$

$$f(1) = 1 \text{ 에서 } a + b = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(5) = 3 \text{ 에서 } 5a + b = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

35. 함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$

② $3g(x)$

③ $g(3x)$

④ $\frac{1}{3}g(3x)$

⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$ 에서 $f(x)$ 를 y 로 놓고

$y = 4x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

이 때, x 와 y 를 바꾸면

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 에서 $f(3x) = y$ 로 놓고

$y = 12x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$$

$$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}g(x)$$

36. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

37. 두 일차함수가 $f(x) = ax + 2$, $g(x) = bx + c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2) = 3$, $(g \circ f)(x) = 3x - 2$ 를 만족하는 a 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{3}{4}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{3}{4}$

⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(x) = ax + 2, g(x) = bx + c \text{ 에서}$$

$$g^{-1}(2) = 3 \text{ 이면 } g(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$3b + c = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = b(ax + 2) + c$$

$$= abx + 2b + c = 3x - 2$$

$$\therefore ab = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$2b + c = -2 \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \text{ 하면}$$

$$b = 4, c = -10, a = \frac{3}{4}$$

해설

$$g^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow g(3) = 2$$

$$(g \circ f)(x) = 3x - 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x - 2$$

$$f(x) = ax + 2 \text{ 에서 } f(k) = ak + 2 = 3 \cdots \textcircled{㉠} \text{ 이라 하면}$$

$$g(3) = g(f(k)) = 3k - 2 = 2, k = \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } \frac{4}{3}a + 2 = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

38. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{그러므로 } f^{-1}(k) = -4$$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \quad (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

39. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

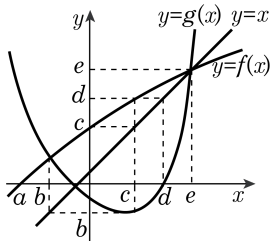
$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 = x \text{ 에서 } x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

40. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $h(x) = (f^{-1} \circ g \circ f)(x)$ 일 때, $h(c)$ 의 값은?



- ① a ② b ③ c
 ④ d ⑤ e

해설

$$h(c) = (f^{-1} \circ g \circ f)(c) = f^{-1}(g(f(c)))$$

$$= f^{-1}(g(d)) = f^{-1}(0)$$

$$f^{-1}(0) = k \text{라 하면 } f(k) = 0$$

$$\therefore k = a$$

$$\text{따라서 } h(c) = a$$

41. $|x| + |y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$|x| + |y| = 2$ 의 그래프는

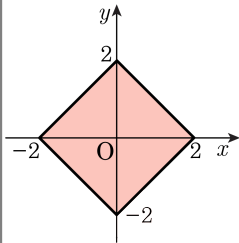
$x + y = 2$ 의 그래프에서

$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이
동한 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$

8



42. 함수 $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9

② -9

③ $2a$

④ $2a - 3$

⑤ $-2a + 3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \leq a \leq 2$ 이어야 한다.

$$\text{이 때, } f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$$

$$f(3) = |2| + |1| + |3 - a| = 6 - a$$

$$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$$

43. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})\{(xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (zx)^{-1}\}}{(x + y + z)(xy + yz + zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$

② $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$

③ $(x + y + z)^{-2}$

④ $\frac{1}{xyz}$

⑤ $\frac{1}{xy + yz + zx}$

해설

$$\begin{aligned}& \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\& \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\&= \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\& \left(\frac{x + y + z}{xyz} \right) \\&= \left(\frac{1}{xyz} \right)^2 = x^{-2}y^{-2}z^{-2}\end{aligned}$$