1. 원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B+C$ 의 값은?

① 4　② 2　③ 0　④ -2　⑤ -4

해설

원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원은
$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 전개하면
$x^2-2x+1+y^2+4y+4=9$
$x^2+y^2-2x+4y-4=0$
따라서 $A+B+C=-2+4-4=-2$

2. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a+b+r$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$
$(x-1)^2+(y+2)^2=-1+1+4$
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ 이므로
$\therefore \mathrm{C}(1,\ -2),\ r=2 \quad \therefore a+b+r=1$

3. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$이다. $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이다.
(지름의 길이) $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

4. 세 점 P(1, 0), Q(0, -1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $a+c$의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ 2　　⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1+a+c=0 & \cdots ㉠ \\ 1-b+c=0 & \cdots ㉡ \\ 2a+2b+c+8=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

$\therefore$ ㉠에서 $a+c=-1$

5. 점 A(0, 6) 과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다. 이 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원위의 점을 $(X,\ Y)$ 라 하면, $X^2+Y^2=4$

중점 M 은

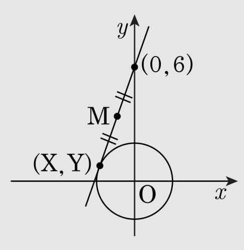
$$\mathrm{M}\left(\frac{X}{2},\ \frac{Y+6}{2}\right)=(x,\ y)$$

$X=2x,\ Y=2y-6$ 대입하면

$(2x)^2+(2y-6)^2=4$

$x^2+(y-3)^2=1$

$a=0,\ b=3,\ r=1$



6. 두 원 $x^2+y^2-2=0$, $x^2+y^2+kx-4y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x+2y+1=0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: $k=-2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2-(x^2+y^2+kx-4y-1)=0$

$\therefore kx-4y+1=0$

이 직선이 직선 $x+2y+1=0$ 과 평행하므로

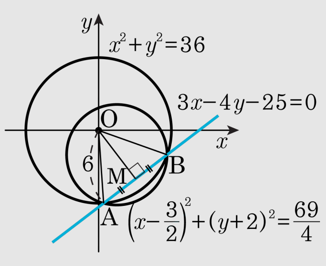
$\frac{k}{1}=\frac{-4}{2}\neq\frac{1}{1}$

$\therefore\ k=-2$

7. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설



두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

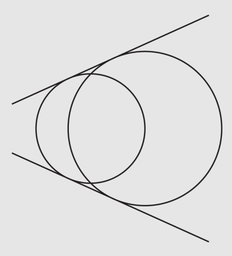
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

8. 두 원 $x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 = 2$ 의 공통접선의 개수는?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 없다

해설

두 원의 중심거리인 1 보다 두 원의 반지름의 합이 크므로 두 원은 두 점에서 만난다.　따라서 2 개의 공통접선이 생긴다.



9. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm ② 10 cm ③ 11 cm ④ 12 cm ⑤ 14 cm

해설
두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2-(9-4)^2}=12$

10. 원 $x^2+y^2-2x-1=0$ 와 같은 중심을 가지고 $x+y+1=0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 3π ⑤ 4π

해설

$x^2+y^2-2x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=2$

따라서 구하는 원의 중심 : $(1,\ 0)$

반지름은 중심에서 $x+y+1=0$ 까지의 거리이므로

$\dfrac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 넓이 : 2π

11. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

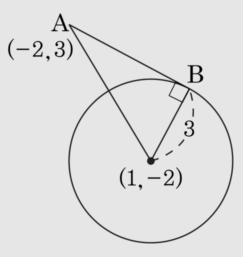
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



13. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

14. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x+\sqrt{2}y=4$ ② $x+\sqrt{3}y=4$ ③ $\sqrt{2}x+y=4$
④ $\sqrt{3}x+y=4$ ⑤ $x-\sqrt{3}=4$

해설
$(1,\ \sqrt{3})$이 원 위의 점이므로
$1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4$
$\therefore x+\sqrt{3}y=4$

15. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2}$ $\leftarrow$ $m = 2, r = 3$
$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

16. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$　② $y = -x \pm 3$　③ $y = -x \pm 4$
④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$　⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로
$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ 에서
$y = -x \pm 2\sqrt{1 + 1}$
$\therefore\ y = -x \pm 2\sqrt{2}$

17. 점 $\mathrm{A}(3,-1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q_1, Q_2라고 할 때, 두 접점 Q_1, Q_2를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ 꼴로 나타낼때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

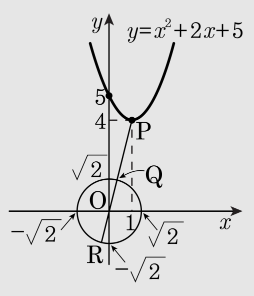
원 위의 두 접점을 $\mathrm{Q}_1(a_1,b_1)$, $\mathrm{Q}_2(a_2,b_2)$라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x+b_1y=5$, $a_2x+b_2y=5$ 이고
두 직선은 동시에 $\mathrm{P}(3,\ -1)$를 지나므로
$3a_1-b_1=5$, $3a_2-b_2=5$이 함께 성립한다.
이것은 $3x-y=5$ 위에 두 점
$\mathrm{Q}_1(a_1,b_1)$, $\mathrm{Q}_2(a_2,b_2)$ 가
동시에 있는 것을 의미하므로
Q_1, Q_2를 지나는 직선의 방정식은 $3x-y=5$이다.
따라서 $y=3x-5$에서 $m=3,\ n=-5$

18. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

① $2\sqrt{2}$　② 2　③ $\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OP}}$−(반지름의 길이) 이고, 최댓값은 $\overline{\mathrm{OP}}$+(반지름의 길이)가 된다.
따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고,
최대 길이는 $\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로
$|\overline{\mathrm{PR}} - \overline{\mathrm{PQ}}| =$ (원의 지름의 길이) $= 2\sqrt{2}$



19. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

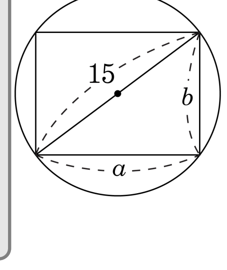
i) $a+b=\frac{42}{2}=21$

ii) $a^2+b^2=15^2$

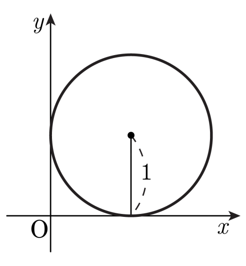
i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$

$\Rightarrow \quad a=12,\ 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2-12k+9 = k^2+1$$

$$3k^2-12k+8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.