

1. 원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B + C$ 의 값은?

① 4

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -4

해설

원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원은
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$ 으로 나타낼 수 있다.

이 식을 전개하면

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\text{따라서 } A + B + C = -2 + 4 - 4 = -2$$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $C(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a + b + r$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore C(1, -2), r = 2 \quad \therefore a + b + r = 1$$

3. 지름의 양 끝점이 $(3, 0)$, $(5, 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ 이다. $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4, 1)$ 이다.

(지름의 길이) $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서

반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$$

4. 세 점 $P(1, 0)$, $Q(0, -1)$, $R(2, 2)$ 을 지나는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. 이때, $a + c$ 의 값은?

①

-1

② -2

③ -3

④ 2

⑤ 3

해설

P , Q , R 의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ 1 - b + c = 0 \cdots \textcircled{㉡} \\ 2a + 2b + c + 8 = 0 \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$$\therefore \textcircled{㉠} \text{에서 } a + c = -1$$

5. 점 A(0, 6) 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이다. 이 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원위의 점을 (X, Y) 라 하면, $X^2 + Y^2 = 4$

중점 M 은

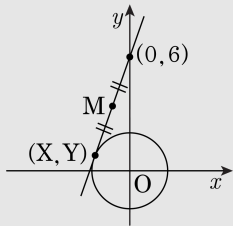
$$M\left(\frac{X}{2}, \frac{Y+6}{2}\right) = (x, y)$$

$X = 2x, Y = 2y - 6$ 대입하면

$$(2x)^2 + (2y - 6)^2 = 4$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$a = 0, b = 3, r = 1$$



6. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

$$\therefore k = -2$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 - 36 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $2\sqrt{11}$

③ $3\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{11}$

⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 -$$

$$(x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 (0,0)과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리 $\overline{OM}$ 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

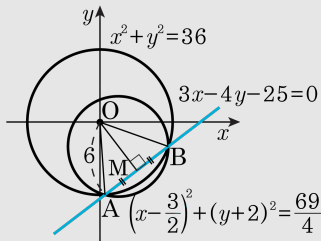
원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$$



8. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ 의 공통접선의 개수는?

① 4

② 3

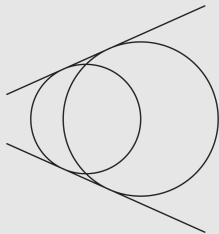
③ 2

④ 1

⑤ 없다

해설

두 원의 중심거리인 1 보다 두 원의 반지름의 합이 크므로 두 원은 두 점에서 만난다. 따라서 2 개의 공통접선이 생긴다.



9. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm

② 10 cm

③ 11 cm

④ 12 cm

⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm이다.

공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$

10. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 와 같은 중심을 가지고 $x + y + 1 = 0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$

② π

③ 2π

④ 3π

⑤ 4π

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2$$

따라서 구하는 원의 중심 : (1, 0)

반지름은 중심에서 $x + y + 1 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\frac{|1 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 넓이 : 2π

11. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

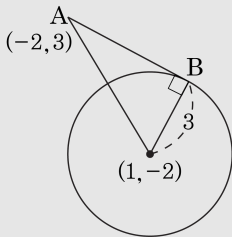
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



13. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 $(5, 0)$ 이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x + \sqrt{2}y = 4$

② $x + \sqrt{3}y = 4$

③ $\sqrt{2}x + y = 4$

④ $\sqrt{3}x + y = 4$

⑤ $x - \sqrt{3} = 4$

해설

$(1, \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$$1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 4$$

15. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$

⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

16. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$

② $y = -x \pm 3$

③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$

⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \text{ 에서}$$

$$y = -x \pm 2\sqrt{1+1}$$

$$\therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

17. 점 A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q_1 , Q_2 라고 할 때, 두 접점 Q_1 , Q_2 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 꼴로 나타낼때, $m^2 + n^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 34

해설

원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 5$, $a_2x + b_2y = 5$ 이고
두 직선은 동시에 P(3, -1)를 지나므로
 $3a_1 - b_1 = 5$, $3a_2 - b_2 = 5$ 이 함께 성립한다.
이것은 $3x - y = 5$ 위에 두 점
 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 가
동시에 있는 것을 의미하므로
 Q_1, Q_2 를 지나는 직선의 방정식은 $3x - y = 5$ 이다.
따라서 $y = 3x - 5$ 에서 $m = 3$, $n = -5$

18. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

① $2\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $3\sqrt{2}$

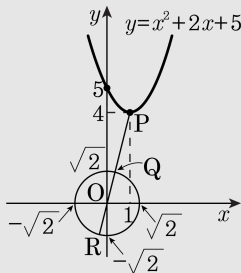
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP}$ -(반지름의 길이)이고, 최댓값은 $\overline{OP}$ +(반지름의 길이)가 된다.

따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{PQ}$ 이고,

최대 길이는 $\overline{PR}$ 이므로

$$|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$$



19. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm

② 6 cm, 10 cm

③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm

⑤ 9 cm, 12 cm

해설

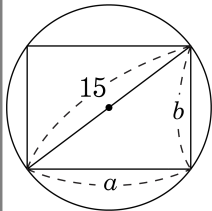
$$\text{i) } a + b = \frac{42}{2} = 21$$

$$\text{ii) } a^2 + b^2 = 15^2$$

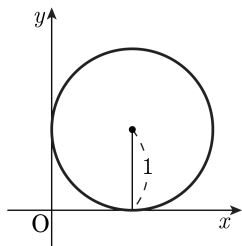
$$\text{i), ii) 를 연립하면, } a^2 + (21-a)^2 - 225 = 0$$

$$\Rightarrow a = 12, 9$$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.