

1. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

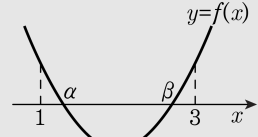
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
 $f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
 $\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
 $\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

2. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

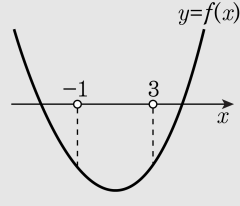
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



$$(i) \quad f(-1) \leq 0 \text{ 에서 } (-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0, k+3 \leq 0 \\ \therefore k \leq -3$$

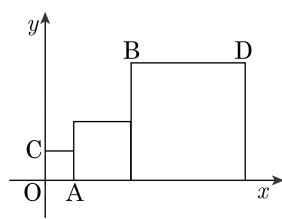
$$(ii) \quad f(3) \leq 0 \text{ 에서 } 3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0, 9k+3 \leq 0 \\ \therefore k \leq -\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

3. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$ 일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 21



해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
 점 A(4, 0) 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
 점 B(21 - 12, 12)
 즉, B(9, 12)
 $\therefore \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

4. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$
 $\therefore P = (2, 0)$
 $a + b = 2$

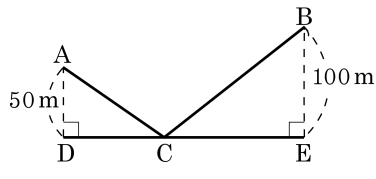
5. 좌표평면 위에 세 지점 P(1, 5), Q(-2, -4), R(5, 3)이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

- ① (0, -1)
- ② (0, 0)
- ③ (0, 1)
- ④ (1, 0)
- ⑤ (1, 1)

해설

A(a, b)라고 하면
 $(a - 1)^2 + (b - 5)^2 = \overline{AP}^2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $(a + 2)^2 + (b + 4)^2 = \overline{AQ}^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
 $(a - 5)^2 + (b - 3)^2 = \overline{AR}^2 \quad \dots \quad \textcircled{3}$
 $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AR}^2$ 이므로
①, ② 연립하면 $a + 3b = 1$
①, ③ 연립하면 $2a - b = 2$
 $\therefore a = 1, b = 0$
 $\therefore (1, 0)$
 $\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

6. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$ 가 지나는 곳으로부터 각각 50 m, 100 m 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 200 m일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값을 구하여라.

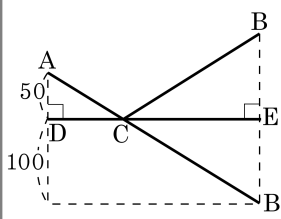


▶ 답 : m

▷ 정답 : 250 m

해설

B를 $\overline{DE}$ 에 대해 대칭이동한 점을 B' 이라 하면
 $\overline{BC} = \overline{CB'}$ 이므로
 $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB'} \geq \overline{AB'}$
 따라서 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값은
 $\overline{AB'} = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250(\text{m})$



7. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2:1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

8. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

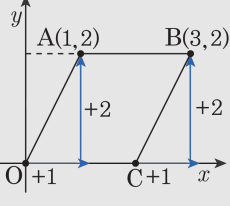
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



9. $\triangle ABC$ 의 변 BC, CA, AB의 중점이 각각 P(-1, a), Q(3, 3), R(1, 6)이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b, \frac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

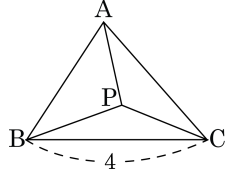
해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치하게 되므로,
$$\left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{a+3+6}{3}\right) = \left(b, \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1, \frac{a+9}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a=1, \quad b=1 \quad \therefore ab=1$$

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축,
 $\overline{BC}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y 축으로 잡으면

$A(0, 2\sqrt{3}), B(-2, 0), C(2, 0)$

$P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

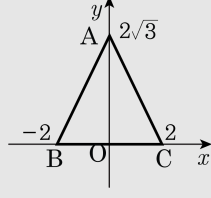
$$= x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y + 20$$

$$= 3x^2 + 3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 16$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은

$x = 0, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16을 갖는다.

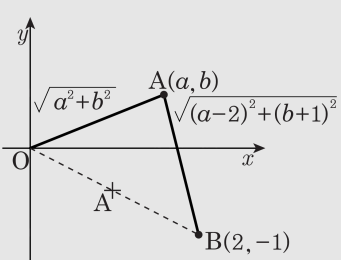


11. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



12. 두 직선 $x - 3y + 5 = 0$, $x + 9y - 7 = 0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 30° 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x + by + c = 0$ 일 때 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2, 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2)$

$$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$$

$$\therefore b = -\sqrt{3}, c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore b + c = 2$$

13. 두 점 $(a, a+1)$ 과 $(a+1, a+2)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이 때 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

- ㉠ $\frac{1}{2}$ ㉡ 1 ㉢ $\frac{3}{2}$ ㉣ $\frac{1}{2}a$ ㉤ a

해설

두 점 $(a, a+1)$ 과 $(a+1, a+2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$m = \frac{(a+2) - (a+1)}{(a+1) - a} = 1$$

따라서, 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (a+1) = (x - a) \text{ 이다.}$$

즉, $y = x + 1$ 이다.

이 때, 두 점 A, B의 좌표는 A(-1, 0), B(0, 1) 이므로

$$\text{삼각형 OAB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

14. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4 - 2}{3 - (-1)}(x - 3)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

15. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 4), B(3, 2) 를 이은 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식은?

① $y = -2x - 5$

② $y = -2x + 5$

③ $y = 2(x - 5)$

④ $y = 2x + 1$

⑤ $y = 2x - 1$

해설

선분 AB 의 기울기 : $\frac{2-4}{3-(-1)} = -\frac{1}{2}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 2 이다.

또, 선분 AB 의 수직이등분선은 두 점 A, B 의 중점을 지난다.

중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 3)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore y = 2x + 1$

16. 두 직선 $2x + y - 7 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x + 5y = 0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{31}$ ② $y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$ ③ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{5}$
④ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{11}$ ⑤ $y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{31}$

해설

$$2x + y - 7 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3x + 2y - 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} : x = 2, y = 3$$

$$\therefore \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 교점} : (2, 3)$$

$$\text{구하는 직선의 기울기는 } -\frac{8}{5}$$

$$\left(\because y = -\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다. } \right)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 기울기 } -\frac{8}{5} \text{ 이고}$$

$$(2, 3) \text{ 을 지나므로}$$

$$y - 3 = -\frac{8}{5}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$$

17. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

18. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O로부터 동쪽으로 6 km, 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O로부터 동쪽으로 5 km, 북쪽으로 4 km의 위치에 마을 P가 있다. 이 때, 마을 P에서 강까지의 최단 거리를 구하시오. (단위는 km)

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O를 원점 O로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.

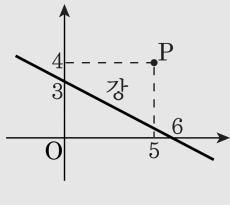
강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 즉, } x + 2y - 6 = 0$$

이때, 마을 P의 좌표는 (5, 4)이다.

따라서, 점 (5, 4)에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} (km)$$



19. 직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행이고, 점 $(2, 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

- ① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0, 1)$
④ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0, 3)$

해설

직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행한 직선을

$3x - 4y + k = 0$ 이라 놓으면,

$$\frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

$\therefore |2 + k| = 5, k = 3$ ($\because y$ 절편 > 0)

$\therefore$ 직선 $3x - 4y + 3 = 0$ 의 y 절편은 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

20. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

- I. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
II. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
III. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y 좌표는 5의 배수이다.

- ① I ② II ③ III ④ I, III ⑤ II, III

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a, b)$ 라고 하면
$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$
 $3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는 $3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
 $a+5b-2=0, 5a-b=0$ 에서
 $x+5y-2=0, 5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
 $y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
I. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
II. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3, 1)$ 이 있다.
III. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
 y 좌표는 5의 배수이다.