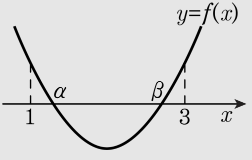
1. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$
$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

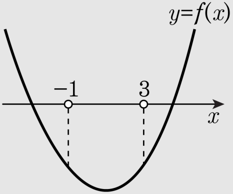
2. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

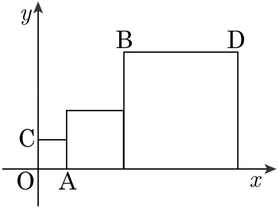
해설

$f(x)=x^2+2(k-1)x+3k$ 라 하자.
$-1<x<3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1)\le 0,\ f(3)\le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1)\le 0$ 에서 $(-1)^2+2(k-1)\cdot(-1)+3k\le 0,\ k+3\le 0$
$\therefore k\le -3$
(ii) $f(3)\le 0$ 에서 $3^2+2(k-1)\cdot 3+3k\le 0,\ 9k+3\le 0$
$\therefore k\le -\dfrac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k\le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

3. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $\mathrm{C}(0, 4)$, 점 $\mathrm{D}(21, 12)$ 일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $\mathrm{B}(21-12,\ 12)$

즉, $\mathrm{B}(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

4. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4), \mathrm{B}(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$ 라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a, 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(2, 0)$

$a+b=2$

5. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1, 5)$, $\mathrm{Q}(-2, -4)$, $\mathrm{R}(5, 3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0, -1)$ ② $(0, 0)$ ③ $(0, 1)$

④ $(1, 0)$ ⑤ $(1, 1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots$ ③

$\overline{\mathrm{AP^2}}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

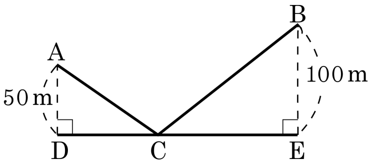
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

6. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{\mathrm{DE}}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,\mathrm{m}, 100\,\mathrm{m}$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,\mathrm{m}$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 250 m

해설

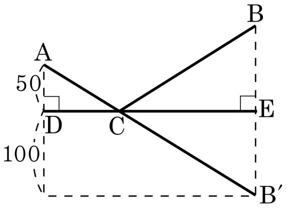
B를 $\overline{\mathrm{DE}}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CB'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\mathrm{m})$



7. 길이가 6 인 선분을 같은 방향으로 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6 인 선분을 OA 라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A 의 좌표는 $(6, 0)$
이 선분을 2 : 1 로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1 로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 12 - 4 = 8$

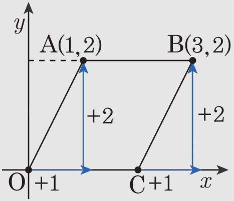
8. O(0, 0), A(1, 2), B(3, 2)일 때, 평행사변형 OABC의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{OA} // \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$이
점 A는 점 O를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore$ C $= (2, 0)$
따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로
(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



9. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1　　② $2\sqrt{5}$　　③ 3　　④ 4　　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

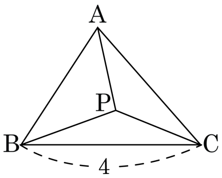
$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3},\ \frac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1,\ \frac{a+9}{3}=\frac{10}{3}$$

$$a=1,\quad b=1\ \therefore\ ab=1$$

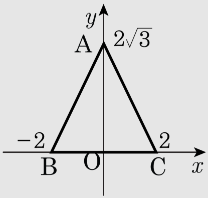
10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, $\overline{BC}$의 중점을 원점 O, 직선 AO를 y축으로 잡으면



$A\left(0, 2\sqrt{3}\right), B(-2, 0), C(2, 0)$

$P(x, y)$라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$= x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$$
$$= 3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$$
$$= 3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은

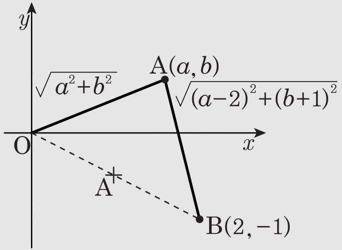
$x=0, y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

11. 좌표평면 위에 점 $O(0,\ 0)$, $A(a,\ b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA}+\overline{AB}$ 의 최솟값은 $\overline{OB}=\sqrt{5}$



12. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3} \qquad \therefore\ b+c=2$

13. 두 점 $(a,\ a+1)$과 $(a+1,\ a+2)$를 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이 때 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{2}a$ ⑤ a

해설

두 점 $(a, a+1)$ 과 $(a+1, a+2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m = \frac{(a+2)-(a+1)}{(a+1)-a} = 1$$

따라서, 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$y-(a+1) = (x-a)$이다.

즉, $y = x+1$이다.

이 때, 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(-1, 0), \mathrm{B}(0, 1)$이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

14. 두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-4=\frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$y=0$ 을 대입하면

$0=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, x=-5$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 A$(-5,0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 B$(0,\frac{5}{2})$,

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

15. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ 를 이은 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식은?

① $y=-2x-5$ ② $y=-2x+5$ ③ $y=2(x-5)$
④ $y=2x+1$ ⑤ $y=2x-1$

해설

선분 AB 의 기울기 : $\dfrac{2-4}{3-(-1)}=-\dfrac{1}{2}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 2 이다.

또, 선분 AB 의 수직이등분선은 두 점 A, B 의 중점을 지난다.

중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(1,\ 3)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은 $y-3=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x+1$

16. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$

④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots ㉠$

$3x+2y-12=0 \cdots\cdots ㉡$

$㉠\times 2-㉡$: $x=2,\ y=3$

$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$

구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$

$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다.}\right)$

$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고

$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

17. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

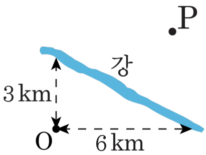
① P$(-4,\ 6)$ ② P$(-4,\ -6)$ ③ P$(2,\ 3)$

④ P$(3,\ 2)$ ⑤ P$(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

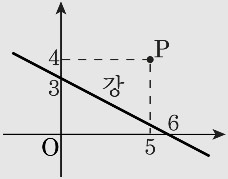
18. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y=-\frac{1}{2}x+3$ 즉, $x+2y-6=0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x+2y-6=0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

19. 직선 $3x-4y=0$ 과 평행이고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

① $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0,\ 3)$

해설

직선 $3x-4y=0$ 과 평행한 직선을
$3x-4y+k=0$ 이라 놓으면,

$$\frac{|3\times 2-4\times 1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore\ |2+k|=5,\ k=3\ (\because y$ 절편>0)

$\therefore$ 직선 $3x-4y+3=0$ 의 y 절편은$\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$

20. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
P$(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.