

1. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a$, $g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

정의역 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로

$f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 가 성립한다.

$f(1) = g(1)$ 에서 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$

$\therefore a - b = -1 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) = g(2)$ 에서 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$

$\therefore a - 2b = -5 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 4$

$\therefore a + b = 7$

2. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \rightarrow Y$, $g(x) = ax + b$ 가 $f = g$ 일 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f 와 g 의 정의역이 같으므로
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이면 $f = g$ 가 된다
 $f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots \text{㉠}$
 $f(0) = 1 = g(0) = b \cdots \text{㉡}$
 $f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots \text{㉢}$
㉠, ㉡, ㉢에서
 $a = 1$, $b = 1$
따라서 $ab = 1$

3. 두 함수 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $-6x + 3k + 2 = -6x - 4 + k$
 $2k = -6$ 에서 $k = -3$

4. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

- ① $k(x) = -x + 1$ ② $k(x) = -x + 2$ ③ $k(x) = -x + 3$
④ $k(x) = -x + 4$ ⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$k \circ g = h$ 이므로 $(k \circ g) \circ f = h \circ f$
 $k \circ (g \circ f) = h \circ f$
 $k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$
 $\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$
 $\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$

5. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1, 1, 3\}$ 에서

$$-3 + k = -1, \quad -1 + k = 1, \quad 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

6. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

7. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f : X \rightarrow X$ 라 할 때, $\{f(-1) + 1\} \{f(1) - 1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

$f(-1) \neq -1, f(1) \neq 1$ 이므로
 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 2, 3, 2 가지이다.
 $\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

해설

함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1, f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
 $\therefore 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

8. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

- ① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$

9. 두 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2}$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 을 만족하는 $k\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $3x-2$

② $6x-5$

③ $2x-3$

④ $x+1$

⑤ $4x+1$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x) \Rightarrow k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x+2}{2}, x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = 2x-2 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow k(x) = g(f^{-1}(x)) = 3(2x-2) + 1 = 6x-5$$

$$\therefore k\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6\left(\frac{x+1}{2}\right) - 5 = 3x-2$$

10. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

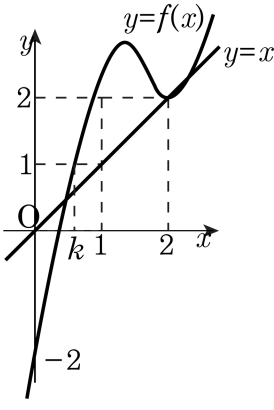
$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x-1, h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

11. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 5
- ⑤ 11

해설

$f(k) = 1$

$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$

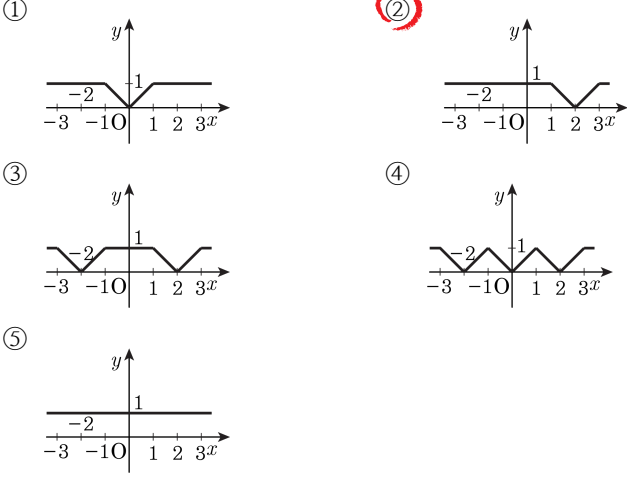
$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$

$= f(f(1)) = f(2) = 2$

$\vdots$

$f^{10}(k) = 2$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$ 의 그래프는 ?



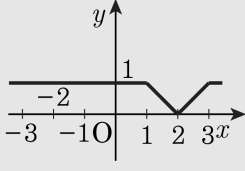
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = x - 2 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x - 2| \geq 1) \\ |x - 2| & (|x - 2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x - 2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



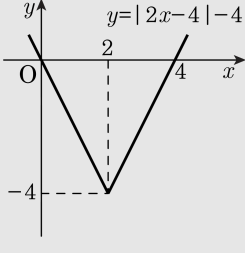
13. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는
 $y = |2x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한
것이므로
다음 그림과 같다.
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이
는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



14. 함수 $y = -|x + 1| + 3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

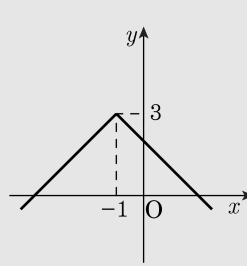
③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = -|x + 1| + 3$ 의 그래프는 다음
그림과 같으므로 최댓값은
 $x = -1$ 일 때, 3이다.



15. $y = ||x + 2| - |x - 6||$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

- ① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$y = ||x + 2| - |x - 6|| = |f(x)|$ 이라하면

$y = f(x)$ 에서

절댓값 기호안의 값을 0 으로 하는

x 의 값이 $-2, 6$ 이므로

(i) $x < -2$ 일 때,

$$y = -(x + 2) + (x - 6) = -8$$

(ii) $-2 \leq x < 6$ 일 때,

$$y = x + 2 + (x - 6) = 2x - 4$$

(iii) $x \geq 6$ 일 때,

$$y = x + 2 - (x - 6) = 8$$

이상에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림1] 과 같다.

이 때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림

1] 의

그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은

그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그

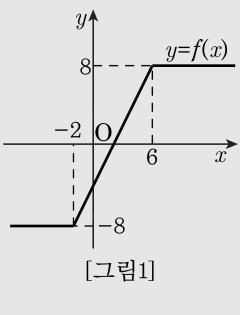
림2] 와 같다. [그림2] 에서 $y = |f(x)|$ 의

그래프와

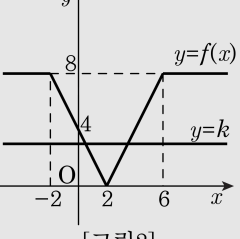
직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이

상이기 위한 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq 8$

따라서 구하는 정수 k 의 개수는 8 개이다.



[그림1]



[그림2]

16. $|x| + |y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2

② 4

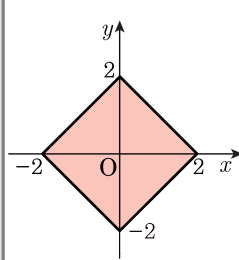
③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$|x| + |y| = 2$ 의 그래프는
 $x + y = 2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이
동한 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$
8



17. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

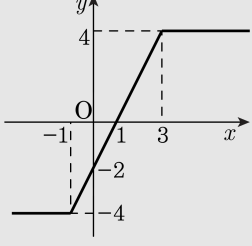
이상에서 주어진 함수의 그래프가 다

음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



18. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?
- ① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
- ④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면
 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$
 $y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)
이다.