1. 집합 $X=\{1,\ 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2+x+a,\ g(x)=x^2+bx+1$ 에 대하여 $f=g$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

정의역 $X=\{1,\ 2\}$ 이고 $f=g$ 이므로

$f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$ 가 성립한다.

$f(1)=g(1)$ 에서 $2+1+a=1+b+1$

$\therefore\ a-b=-1 \quad \cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$ 에서 $8+2+a=4+2b+1$

$\therefore\ a-2b=-5 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=4$

$\therefore\ a+b=7$

2. 두 집합 $X=\{-1,0,1\}$, $Y=\{0,1,2\}$에 대하여 두 함수 $f:X\to Y$, $f(x)=x^3+1$, $g:X\to Y$, $g(x)=ax+b$가 $f=g$일 때, ab의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ -1　⑤ -2

해설

f와 g의 정의역이 같으므로

$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이면 $f=g$가 된다

$f(-1)=0=g(-1)=-a+b\cdots$㉠

$f(0)=1=g(0)=b\cdots$㉡

$f(1)=2=g(1)=a+b\cdots$㉢

㉠,㉡,㉢에서

$a=1,\ b=1$

따라서 $ab=1$

3. 두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=-2x+k$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 에서

$-6x+3k+2=-6x-4+k$

$2k=-6$ 에서 $k=-3$

4. 세 함수 f, g, h 가 $(g\circ f)(x)=x$, $(h\circ f)(x)=-x+3$ 일 때, $k\circ g=h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x)=-x+1$ ② $k(x)=-x+2$ ③ $k(x)=-x+3$

④ $k(x)=-x+4$ ⑤ $k(x)=-x+5$

해설

$k\circ g=h$ 이므로 $(k\circ g)\circ f=h\circ f$

$k\circ(g\circ f)=h\circ f$

$k\circ I=h\circ f(\because g\circ f=I,\ I$는 항등함수$)$

$\therefore k=h\circ f(\because k\circ I=I\circ k=k)$

$\therefore k(x)=(h\circ f)(x)=-x+3$

5. 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=-x+k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(-1)=1+k$

$f(1)=-1+k$

$f(3)=-3+k$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$\therefore X=\{1+k,\ -1+k,\ -3+k\}$

그런데 $-3+k<-1+k<1+k$ 이므로

$X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서

$-3+k=-1,\ -1+k=1,\ 1+k=3$

$\therefore k=2$

6. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f\ :\ X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 0$ ② $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$ ③ $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \dfrac{5}{2}$, $b = 0$ ⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \dfrac{3}{2}$, $b = 0$

7. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f\ : X \rightarrow X$ 라 할 때, $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$f(-1) \neq -1,\ f(1) \neq 1$ 이므로
X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 $2,\ 3,\ 2$ 가지이다.
$\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

해설

함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
$\therefore\ 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

8. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,

($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$

$x = 0, 1, 2$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

9. 두 함수 $f(x)=\frac{x+2}{2}$, $g(x)=3x+1$에 대하여 $(k\circ f)(x)=g(x)$을 만족하는 $k\left(\frac{x+1}{2}\right)$을 구하면?

① $3x-2$　② $6x-5$　③ $2x-3$

④ $x+1$　⑤ $4x+1$

해설

$(k\circ f)(x)=g(x) \Rightarrow k(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

$f^{-1}(x)$를 구해보면

$y=\frac{x+2}{2}$, $x=\frac{y+2}{2} \Rightarrow y=2x-2 \cdots f^{-1}(x)$

$\Rightarrow k(x)=g(f^{-1}(x))=3(2x-2)+1=6x-5$

$\therefore k\left(\frac{x+1}{2}\right)=6\left(\frac{x+1}{2}\right)-5=3x-2$

10. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$가 $f(h(x)) = g(x)$를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$　　② -2　　③ $-\frac{5}{2}$　　④ -3　　⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

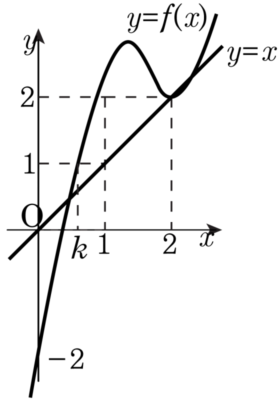
$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\left\{h(x)-1\right\} = (x+1)\left\{h(x)+2\right\}$$

$$2h(x) = -3x-1, h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore\ h(2) = -\frac{7}{2}$$

11. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-5x^2+8x-2$ 에서 $f(k)=1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2=f\circ f,\ f^3=f^2\circ f,\ f^n=f^{n-1}\circ f$)



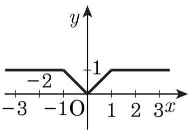
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

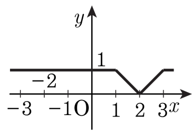
$$f(k)=1$$
$$f^2(k)=f(f(k))=f(1)=2$$
$$f^3(k)=f^2\circ f(k)=f^2(f(k))=f^2(1)$$
$$=f(f(1))=f(2)=2$$
$$\vdots$$
$$f^{10}(k)=2$$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

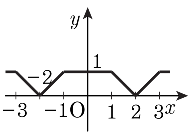
①



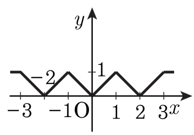
②



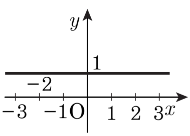
③



④



⑤



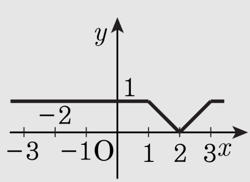
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$g(x) = x - 2$ 에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



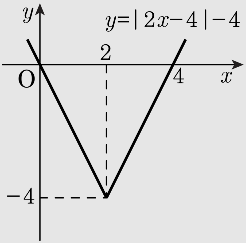
13. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



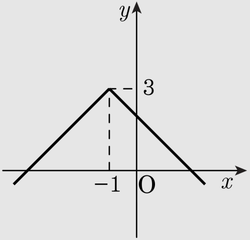
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

14. 함수 $y = -|x+1|+3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -|x+1|+3$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x = -1$ 일 때, 3이다.

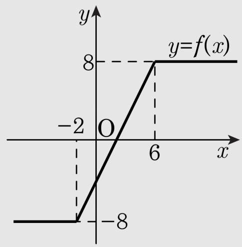


15. $y=||x+2|-|x-6||$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

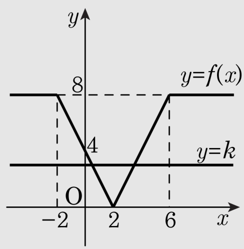
해설

$y=||x+2|-|x-6||=|f(x)|$이라하면
$y=f(x)$에서
절댓값 기호안의 값을 0으로 하는
x의 값이 $-2, 6$ 이므로
(i) $x<-2$ 일 때,
$y=-(x+2)+(x-6)=-8$
(ii) $-2\le x<6$일 때,
$y=x+2+(x-6)=2x-4$
(iii) $x\ge 6$ 일 때,
$y=x+2-(x-6)=8$
이상에서 $y=f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다.



[그림1]

이 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]의
그래프에서 $y\ge 0$인 부분은
그대로 두고, $y<0$인 부분을
x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림2]와 같다. [그림2]에서 $y=|f(x)|$의 그래프와
직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2이상이기 위한 k의 값의 범위는 $0<k\le 8$
따라서 구하는 정수 k의 개수는 8개이다.



[그림2]

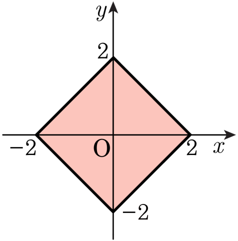
16. $|x|+|y|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$ 8



17. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

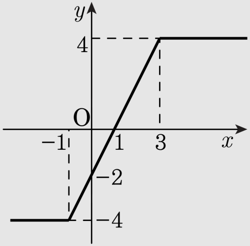
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

18. 수직선 위에 세 점 $A(-2)$, $B(1)$, $C(2)$가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① $P(-2)$　　② $P(-1)$　　③ $P(0)$

④ $P(1)$　　⑤ $P(2)$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$

$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $P(1)$ 이다.