1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

2. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$
② $xQ(x), -R+3$
③ $xQ(x), -R-6$
④ $xQ(x)+R, -R-3$
⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$\therefore\ xf(x)=x(x+1)Q(x)+xR$

$$\begin{aligned}\therefore\ xf(x)-3 &= x(x+1)Q(x)+xR-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)\right\}+(x+1)R-R-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)+R\right\}-R-3\end{aligned}$$

3. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$

③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

4. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

5. $(1-x-x^2)^{25}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{49}x^{49}+a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{50}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2^{24}　　④ 2^{25}　　⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{50}x^{50}$
$x=1$을 양변에 대입하면
$-1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{50}\cdots$①
$x=-1$을 양변에 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{49}+a_{50}\cdots$②
①+②: $2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{50})=0$
$a_0+a_2+a_4+...+a_{50}=0$

6. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면

$f(2)=4a+2b+4=0\cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=a-b-5=6\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-8$

$\therefore\ a-b=11$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

8. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$를 $x^2+3x-15$로 나누면 나머지가 -2이다.
이때, $f(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나눈 나머지는?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 24

해설

$f(x)+g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_1(x)+12\cdots$㉠
$f(x)-g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_2(x)-2\cdots$㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+10$
$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+5$
$\therefore$ 나머지는 5

9. 다항식 $x^4+x^2y^2+25y^4$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2+mxy+5y^2)(x^2+nxy+5y^2)$ 가 되었다. 이 때 상수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

(준식) $= x^4+10x^2y^2+25y^4-9x^2y^2$

$= \left(x^2+5y^2\right)^2-(3xy)^2$

$= \left(x^2+5y^2-3xy\right)\left(x^2+5y^2+3xy\right)$

$\therefore\ m+n=0$

10. $a+b+c=0$일 때, $\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ac}+\frac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$(\text{준식}) = \frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$$
$$= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

11. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형 ② x가 빗변인 직각삼각형
③ $x=y$인 이등변삼각형 ④ $y=z$인 이등변삼각형
⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$

$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$

$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$

$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)

$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

12. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.