

1. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 1)$ 이고, 한 점 $(0, -2)$ 를 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수식이 $y = a(x - p)^2 + q$ 일 때, apq 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-3, 1)$ 이므로

$$y = a(x + 3)^2 + 1$$

점 $(0, -2)$ 를 지나므로

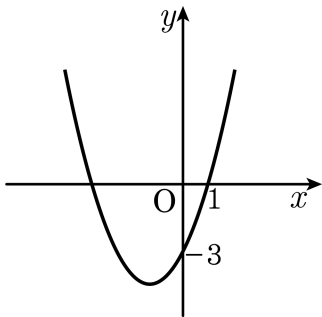
$$-2 = a(0 + 3)^2 + 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}(x + 3)^2 + 1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}, p = -3, q = 1 \text{ 이므로}$$

$$apq = -\frac{1}{3} \times (-3) \times 1 = 1 \text{ 이다.}$$

2. 다음은 이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $b^2 - c^2$ 의 값을 구하면?



① -5

② -3

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$y = x^2 + bx + c$ 의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(0, -3)$ 을 지나므로 $c = -3$ 이다.

$$0 = 1 + b - 3$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore b^2 - c^2 = -5$$

3. 축의 방정식이 $x = 4$ 이고, 두 점 $(2, -10), (3, -4)$ 를 지나는 포물선의 y 절편은?

① -30

② -32

③ -34

④ -36

⑤ -38

해설

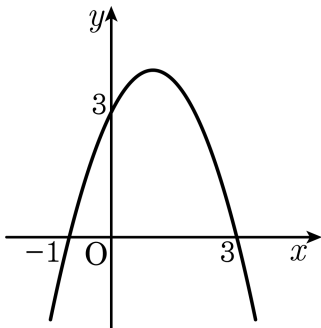
$y = a(x - 4)^2 + q$ 에 두 점 $(2, -10), (3, -4)$ 를 각각 대입하면

$$4a + q = -10, a + q = -4$$

$$\therefore a = -2, q = -2$$

$y = -2(x - 4)^2 - 2$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $y = -34$

4. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $(1, k)$ 가 이 그래프 위의 점일 때, k 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점 $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ 을 각각 대입하여 a, b, c 를 구하면

$$a = -1, b = 2, c = 3$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$$

$(1, k)$ 를 대입하면 $k = 4$ 이다.

5. 포물선 $y = ax^2 + 10x - 12$ 과 x 축이 두 점 $A(1, 0)$, $B(b, 0)$ 에서 만날 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$y = ax^2 + 10x - 12$ 에 $A(1, 0)$ 을 대입하면

$0 = a + 10 - 12$, $a = 2$ 이다.

$y = 2x^2 + 10x - 12$ 이므로

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$x = 1$ 또는 $x = -6$ 이다.

$b = -6$ 즉, $B(-6, 0)$

$$\therefore a + b = -4$$

6. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 최댓값이 8 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$y = -x^2 - 4x + k = -(x + 2)^2 + 4 + k$$

최댓값이 8 이므로

$$4 + k = 8 \quad \therefore k = 4$$

7. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + b$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 -2 를 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① 0

② -2

③ -4

④ -3

⑤ 6

해설

$x = 1$ 에서 최솟값이 -2 이므로

꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$ 이다.

$$y = 2x^2 + ax + b = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$$

$$a = -4, b = 0$$

$$\therefore a - b = -4 - 0 = -4$$

8. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 -3 이 되었다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면

$$y = (x - 3)^2 - 8 + m$$

$$-8 + m = -3 \quad \therefore m = 5$$

9. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax - a - 2$ 의 최댓값이 1 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4ax - a - 2 \\&= -(x^2 - 4ax) - a - 2 \\&= -(x - 2a)^2 + 4a^2 - a - 2\end{aligned}$$

최댓값이 $4a^2 - a - 2 = 1$ 이므로

$$4a^2 - a - 3 = 0 ,$$

$$(4a + 3)(a - 1) = 0 ,$$

$$a = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } a = 1 ,$$

$$\therefore a > 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

10. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -49

해설

두 수를 x , $x + 14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y = x(x + 14) = x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$

따라서 $x = -7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

11. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 x cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$ cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 y cm² 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$

② $\frac{15}{2}$

③ $\frac{25}{2}$

④ $\frac{31}{5}$

⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8 - x)$ cm ,
늘어난 세로의 길이는 $(6 + 2x)$ cm 에서

$$\begin{aligned}y &= (8 - x)(6 + 2x) \\&= 48 + 10x - 2x^2 \\&= -2 \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} \right) + 48 \\&= -2 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{121}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

12. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16

② 20

③ 36

④ 55

⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a , 넓이를 b 라 하면

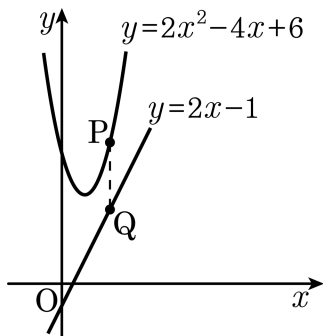
$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.

따라서 $ab = 64$ 이다.

13. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t, 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, 2t - 1)$ 이다.

$$\overline{PQ} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

14. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최솟값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1, 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$ 이므로 $y = a(x - 2)^2 - 3$

점 $(-1, 6)$ 을 대입하면 $a = 1$

$y = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서

$a = 1, b = -4, c = 1$

따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

16. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.

넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 6m

② 8m

③ 10m

④ 12m

⑤ 14m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

$$y = x(40 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 40x$$

$$= -2(x - 10)^2 + 200$$

$x = 10$ 일 때, 최대값은 200 이다.

17. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로 길이 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 8cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm² 라 하면,

$$\begin{aligned}y &= x(16 - x) \\&= -x^2 + 16x \\&= -(x^2 - 16x) \\&= -(x - 8)^2 + 64\end{aligned}$$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

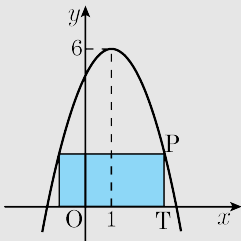
18. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

둘레의 길이 $= 2[2(t - 1) - t^2 + 2t + 5]$

$$= 2(-t^2 + 4t + 3)$$

$$= -2t^2 + 8t + 6$$

$$= -2(t - 2)^2 + 14$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

19. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초

② 2 초

③ 3 초

④ 4 초

⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned} h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\ &= -5(t - 3)^2 + 67 \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

20. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\&= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m \\&= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m \\ \therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\&= -m^2 + 2m - 1 \\&= -(m^2 - 2m + 1) \\&= -(m-1)^2\end{aligned}$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.