

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 두 점 $(2, 1)$, $(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

- ① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 29$ ② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$
③ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 29$ ④ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$
⑤ $x^2 + y^2 = 4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2 + (1+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$$

3. 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$
- ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1)을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
 $(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$
 $\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{2}$
 $0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $A = -1, B = 1, C = -2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

4. 두 점 $(1, 2)$, $(2, 1)$ 을 지나고, x 축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

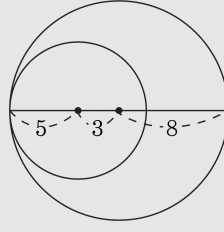
해설

그 원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이라 하면
(1, 2), (2, 1)을 지나므로
 $(1-a)^2 + (2-b)^2 = b^2$, $(2-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$
 $1-2a+a^2+4-4b=0 \cdots \textcircled{1}$
 $4-4a+a^2+1-2b=0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}$
 $a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=5$
i) $a=1$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=1$
ii) $a=5$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=5$
 $\therefore$ 두 원의 중심은 $(1, 1)$, $(5, 5)$ 이다.
중심거리
 $= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5. 반지름의 길이가 5cm, 8cm인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?
- ① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
 - ② 두 원이 외접한다.
 - ③ 두 원이 두 점에서 만난다.
 - ④ 두 원이 내접한다.
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에 내접한다.



6. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

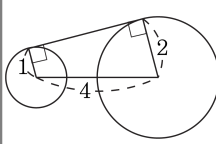
$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면
 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



8. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x-1, y+3)$ 에 의하여 점 $(3, 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

㉠ $(2, 4)$

㉡ $(4, 2)$

㉢ $(2, -4)$

㉣ $(-2, 4)$

㉤ $(4, -2)$

해설

f 는 x 축의 방향으로 -1 , y 축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1, 1+3) = (2, 4)$ 로 옮겨진다.

9. 직선 $2x - y + 3 = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

- ① $2x + y + 3 = 0$ ② $2x - y - 3 = 0$ ③ $2x + y - 3 = 0$
④ $x - 2y - 3 = 0$ ⑤ $x - 2y + 3 = 0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 를 대입한다.

10. 좌표평면 위의 점 $(-1, 3)$ 을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3, 5)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, 3), (3, 5)$ 의 중점이 (a, b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

11. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

- (i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$
(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$
(i), (ii)로부터 $2b - 1 = 9 \quad \therefore b = 5$

12. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$ 이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 이므로 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
 $\therefore a = 2, b = -6, c = 6$
따라서, 구하는 a, b, c 의 값의 합은 $2 + (-6) + 6 = 2$

13. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$

② $4 \in A$

③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$

⑤ $17 \in A$

해설

$A = \{3, 10, 17, \dots\}$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

14. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A = \{1, 3\}$ 일 때, $n(A) = 2$

② $n(\emptyset) = 0$

③ $n(\{2, 4, 5\}) = 3$

④ $A = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 약수}\}$ 이면 $n(A) = 3$

⑤ $n(\{2, 5, 7\}) - n(\{2, 5\}) = 1$

해설

④ $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $n(A) = 4$

15. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $A = \emptyset$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 0 개 이다.
- ② 집합 A 의 원소의 개수보다 집합 B 의 원소의 개수가 많으면 $A \subset B$ 이다.
- ③ $A \subset B$ 이면 집합 B 의 원소의 개수가 집합 A 의 원소의 개수보다 많다.
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 이면 $n(A) = 4$ 이다.
- ⑤ $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{2, 4, 6\}) = 0$ 이다.

해설

- ② 반례: $\{1\} \not\subset \{2, 3\}$
- ③ 반례: $\{1, 2\} \subset \{1, 2\}$, $n(\{1, 2\}) = n(\{1, 2\})$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.

16. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 것의 개수는?

- ① 7개 ② 16개 ③ 28개 ④ 30개 ⑤ 31개

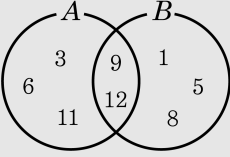
해설

짝수만으로 이루어진 부분집합은 집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합에서 공집합을 제외하면 되므로 $2^3 - 1 = 7$ (개)

17. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 5, 8, 9, 12\}$, $A \cap B = \{9, 12\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ 일 때, 집합 A 는?
- ① $\{2, 4, 6, 7, 8\}$ ② $\{2, 3, 6, 8\}$
③ $\{3, 6, 8, 9, 12\}$ ④ $\{3, 6, 9, 12\}$
⑤ $\{3, 6, 9, 11, 12\}$

해설

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



그러므로 집합 $A = \{3, 6, 9, 11, 12\}$ 이다.

18. 두 집합 $A = \{3, 4, a + 1\}$, $B = \{a, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$A \cap B = \{4, 5\}$ 이므로 $A = \{3, 4, 5\}$

$\therefore a + 1 = 5$, $a = 4$

$B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ 이다.

원소의 합은 $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ 이다.

19. $A = \{2, 3, a + 2\}$, $B = \{a - 1, 4\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4\}$ 일 때, $B - A$ 는?

- ① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A \cap B = \{4\}$ 이므로 $a + 2 = 4$, $a = 2$ 이다.
따라서 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4\}$ 이므로 $B - A = \{1\}$ 이다.

20. 어느 학급의 학생 중 농구를 좋아하는 학생이 32 명, 야구를 좋아하는 학생이 26 명, 농구와 야구를 모두 좋아하는 학생이 9 명이다. 이 때, 농구 또는 야구를 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 49명

해설

농구를 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 야구를 좋아하는 학생을 집합 B 라고 하자.

농구와 야구를 동시에 좋아하는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 9$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 32 + 26 - 9$$

$x = 49$

21. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $P \subset Q$

② $P^c \subset Q$

③

$Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$

⑤ $P^c \cap Q^c = \emptyset$

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로
 $P \subset Q^c$
 $\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$
 $\Leftrightarrow Q \subset P^c$

22. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

23. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

24. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.