1. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

2. 두 점 $(2,\ 1)$, $(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y+1)^2=29$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

③ $(x-2)^2+(y-1)^2=29$

④ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

⑤ $x^2+y^2=4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2+(1+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

3. 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-x+y-2=0$ ② $x^2+y^2-2x+3y-4=0$

③ $x^2+y^2+x-4y-5=0$ ④ $x^2+y^2+3x-y-1=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y-2=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$으로 놓으면
이 원이 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
$(-1)^2+(-1)^2+\mathrm{A}\cdot(-1)+\mathrm{B}\cdot(-1)+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}=2\cdots$㉠
$1^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 1+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2\cdots$㉡
$0^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{B}+\mathrm{C}=-1\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$\mathrm{A}=-1,\ \mathrm{B}=1,\ \mathrm{C}=-2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+y-2=0$

4. 두 점 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2,\ (2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$1-2a+a^2+4-4b=0 \cdots$ ㉠

$4-4a+a^2+1-2b=0 \cdots$ ㉡

㉡ $\times 2-$ ㉠

$a^2-6a+5=0,\ (a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

i) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$

ii) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$

$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.

중심거리

$= \sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

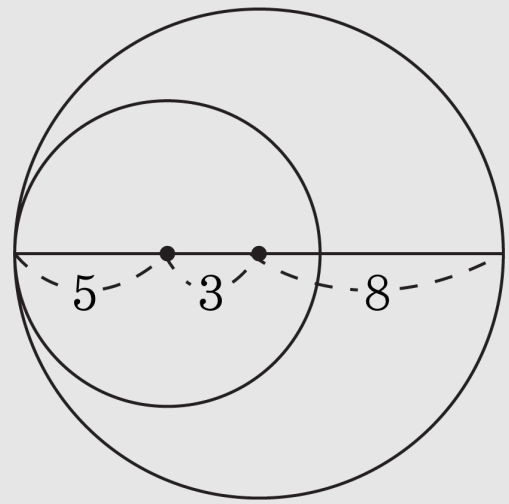
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



6. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$
② $2x - 2y + 3 = 0$
③ $2x - 2y - 3 = 0$
④ $2x + 2y - 3 = 0$
⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

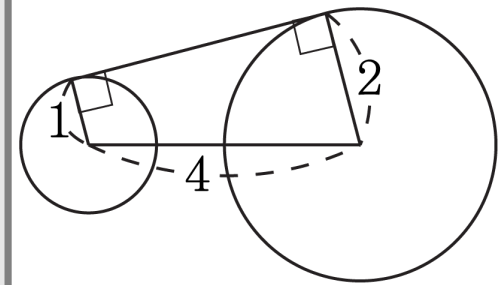
$(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) = 0$
$-4x + 4y + 6 = 0$
$\therefore\ 2x - 2y - 3 = 0$

7. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



8. 평행이동 $f : (x, y) \to (x-1,\ y+3)$ 에 의하여 점 $(3,\ 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(2,\ 4)$ ② $(4,\ 2)$ ③ $(2,\ -4)$

④ $(-2,\ 4)$ ⑤ $(4,\ -2)$

해설

f 는 x 축의 방향으로 -1, y 축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1,\ 1+3) = (2,\ 4)$ 로 옮겨진다.

9. 직선 $2x-y+3=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+3=0$ ② $2x-y-3=0$ ③ $2x+y-3=0$

④ $x-2y-3=0$ ⑤ $x-2y+3=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

10. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (a,b)$$

$$\Rightarrow a+b=5$$

11. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii) 로부터 $2b - 1 = 9 \quad \therefore b = 5$

12. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a,b,c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+6y+6=0$
$\therefore a=2,\ b=-6,\ c=6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2+(-6)+6=2$

13. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4,\ n$은 자연수$\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$　② $4 \in A$　③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$　⑤ $17 \in A$

해설

$A = \{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

14. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A = \{1,\ 3\}$ 일 때, $n(A) = 2$

② $n(\varnothing) = 0$

③ $n(\{2,\ 4,\ 5\}) = 3$

④ $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 이면 $n(A) = 3$

⑤ $n(\{2,\ 5,\ 7\}) - n(\{2,\ 5\}) = 1$

해설

④ $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이므로 $n(A) = 4$

15. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \varnothing$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 0 개 이다.

② 집합 A 의 원소의 개수보다 집합 B 의 원소의 개수가 많으면 $A \subset B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이면 집합 B 의 원소의 개수가 집합 A 의 원소의 개수보다 많다.

④ $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 4$ 이다.

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{2,\ 4,\ 6\}) = 0$ 이다.

해설

② 반례 : $\{1\} \not\subset \{2,\ 3\}$

③ 반례 : $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2\}$, $n(\{1,\ 2\}) = n(\{1,\ 2\})$

④ $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.

16. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 것의 개수는?

① 7개 ② 16개 ③ 28개 ④ 30개 ⑤ 31개

해설

짝수만으로 이루어진 부분집합은 집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합에서 공집합을 제외하면 되므로 $2^3 - 1 = 7$(개)

17. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 5, 8, 9, 12\}$, $A \cap B = \{9, 12\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ 일 때, 집합 A 는?

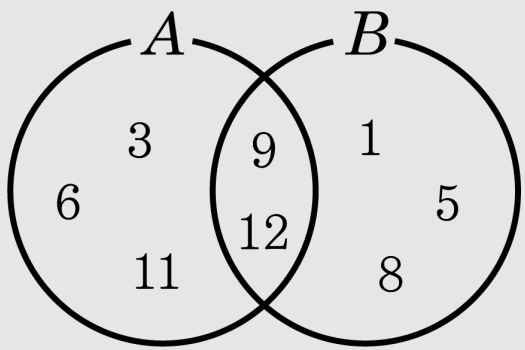
① $\{2, 4, 6, 7, 8\}$ ② $\{2, 3, 6, 8\}$

③ $\{3, 6, 8, 9, 12\}$ ④ $\{3, 6, 9, 12\}$

⑤ $\{3, 6, 9, 11, 12\}$

해설

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



그러므로 집합 $A = \{3, 6, 9, 11, 12\}$ 이다.

18. 두 집합 $A = \{3, 4, a+1\}, B = \{a, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$A \cap B = \{4, 5\}$ 이므로 $A = \{3, 4, 5\}$

$\therefore a + 1 = 5$, $a = 4$

$B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ 이다.

원소의 합은 $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ 이다.

19. $A = \{2, 3, a+2\}, B = \{a-1, 4\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A \cap B = \{4\}$ 이므로 $a + 2 = 4, a = 2$ 이다.
따라서 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 4\}$ 이므로 $B - A = \{1\}$ 이다.

20. 어느 학급의 학생 중 농구를 좋아하는 학생이 32 명, 야구를 좋아하는 학생이 26 명, 농구와 야구를 모두 좋아하는 학생이 9 명이다. 이 때, 농구 또는 야구를 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 49 명

해설

농구를 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 야구를 좋아하는 학생을 집합 B 라고 하자.

농구와 야구를 동시에 좋아하는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 9$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$x = 32 + 26 - 9$

$x = 49$

21. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$　　② $P^c \subset Q$　　③ $Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$　　⑤ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

해설

명제 $p \to \sim q$ 가 참이므로

$P \subset Q^c$

$\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$

$\Leftrightarrow Q \subset P^c$

22. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

23. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$

따라서 $xy \geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

24. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.