1. 두 원 $x^2+y^2-4x=0,\ x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2x-3y+1=0$　② $x^2+y^2-5x-y+4=0$

③ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$　④ $x^2+y^2+4x+2y+2=0$

⑤ $x^2+y^2-5x+4y+3=0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+k\left(x^2+y^2-6x-2y+8\right)=0$

$(k \neq -1$ 인 실수$)$

이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로

$1-4+k(1-6+8)=0$

$-3+3k=0 \quad \therefore k=1$

따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는

원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+8=0$

$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$

2. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$
③ $-2 < m < 2$
④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2+1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0,\quad m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

3. 원 $x^2 + y^2 = 5$와 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k < -5$ 또는 $k > 5$
② $-5 < k < 5$
③ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > 5$
④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
⑤ $-2 < k < 2$

해설

$x^2 + y^2 = 5$에 $y = 2x + k$를 대입하면

$x^2 + (2x + k)^2 = 5$

$5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이다.

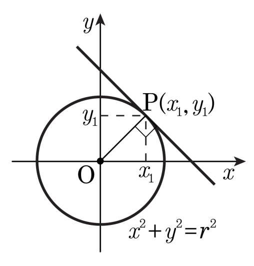
$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5\left(k^2 - 5\right) > 0$

$-k^2 + 25 > 0$

$(k - 5)(k + 5) < 0$

$\therefore -5 < k < 5$

4. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $x_1x + y_1y = r^2$ 임을 보인 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?



(i) P 가 $x_1 \neq 0$ 인 점이나 $y_1 \neq 0$ 인 점일 때, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$ 을 지나는 직선 OP 의 기울기는 $\boxed{(가)}$ 이다. 그런데 점 P 에서의 접선은 직선 OP 와 수직이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은 $\boxed{(나)}$

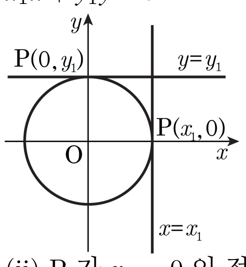
이 식을 정리하면

$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$ ······ ㉠

한편, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로 $\boxed{(다)}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = r^2$ ······ ㉢



(ii) P 가 $x_1 = 0$ 인 점이나 $y_1 = 0$ 인 점일 때,

점 P 의 좌표가 $(0, y_1)$ 또는 $(x_1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은 $\boxed{(라)}$ ······ ㉢$'$ 또는 $\boxed{(마)}$ ······ ㉢$''$ 이다. 이 때, $r = |y_1|$ 또는 $r = |x_1|$ 이므로

㉢$'$ 또는 ㉢$''$ 은 ㉢과 같은 식이다.

(i), (ii) 로부터 접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = r^2$

① (가) : $\dfrac{y_1}{x_1}$

② (나) : $y - y_1 = \dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

③ (다) : $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

④ (라) : $y = y_1$

⑤ (마) : $x = x_1$

해설

② (나) : $y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

5. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{5}{2}$　③ 0　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면
$y = m(x-3) - 1 = mx - 3m - 1$
원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$
$(-3m-1)^2 = 5m^2 + 5$
$4m^2 + 6m - 4 = 0$
$2m^2 + 3m - 2 = 0$
$m = -2,\ \frac{1}{2}$

6. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5
④ $5\sqrt{2}-5$　　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설
두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

7. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

(Ⅰ) 항상 $(0,\ 1)$과 $(-1,\ 0)$을 지난다.
(Ⅱ) $x-y+1=0$과 $x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다.
(Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅱ　⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어 직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도 $x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

8. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(1, 2)$는 점 $(-1, 3)$으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1, -2)$　② $(-3, 2)$　③ $(2, -1)$
④ $(-1, 2)$　⑤ $(2, -3)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 -2,
y축의 방향으로 $+1$만큼
평행이동 하는 변환이다.
$x^2+y^2+2x-2y+1=0$의 중심은
$(-1, 1)$이므로 평행이동 f에 의하여
$(-1-2, 1+1)=(-3, 2)$로 이동한다.

9. $y=x+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y=-x+3$ ② $y=x-3$ ③ $y=-x-3$
④ $y=3x+1$ ⑤ $y=3x+3$

해설

x축대칭은 y의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.

10. 직선 $ax + by + c = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 직선 $3x - 4y + 2 = 0$ 과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $\frac{8a}{3b}$ 의 값은?(단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{32}{9}$　② -2　③ 2　④ 4　⑤ $\frac{32}{9}$

해설

$y = x$ 대칭시키면 직선은

$bx + ay + c = 0 \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$,

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ 과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ 가 되어야 한다.

$\therefore \quad \frac{8a}{3b} = \frac{8}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right) = 2$

11. 직선 $3x-4y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $3x-4y+12=0$　　② $3x-4y-4=0$
③ $4x-3y+12=0$　　④ $-4x+3y+12=0$
⑤ $-4x+3y-4=0$

해설

1) x 축으로 -1 , y 축으로 2만큼 평행이동
$\Rightarrow 3(x+1)-4(y-2)+1=0$
$\Rightarrow 3x-4y+12=0$
2) $y=x$ 대칭
$\Rightarrow -4x+3y+12=0$

12. 점 $\mathrm{P}(2,3)$ 를 직선 $x+y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(-2,-1)$ ② $(2,-1)$ ③ $(-2,1)$
④ $(0,1)$ ⑤ $(2,5)$

해설

대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'=(a,b)$ 라 하면,
i) $\overline{\mathrm{PP}'}$ 의 기울기는 $y=-x+3$ 에 수직이므로 1 이다.
$\Rightarrow \dfrac{b-3}{a-2}=1 \quad \cdots ㉠$
ii) P,P' 의 중점은 $y=-x+3$ 위에 있다.
$\Rightarrow \dfrac{2+b}{2}=-\dfrac{(3+a)}{2}+3 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡ 를 연립하면, $a=0, b=1$
$\therefore \mathrm{P}'=(0,1)$

13. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$
② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
④ $(x+1)^2+y^2=2$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

14. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A = \left\{x|x\text{는 짝수}\right\}$ 이면 A 는 유한집합이다.

② $B = \{0, 1, 2\}$ 이면 $2 \in B$ 이다.

③ $C = \left\{x|x\text{는 } 2 < x < 4\text{인 짝수}\right\}$ 이면 $n(C) = 1$ 이다.

④ $D = \left\{x|x\text{는 6보다 작은 2의 배수}\right\}$ 이면 $D = \varnothing$ 이다.

⑤ $n(\{0, 1, 4\}) - n(\{1, 2\}) = 1$ 이다.

해설

① $A = \left\{x|x\text{는 짝수}\right\}$ 이면 A 는 무한집합이다.
③ $C = \left\{x|x\text{는 } 2 < x < 4\text{인 짝수}\right\}$ 이면 $n(C) = 0$ 이다.
④ $D = \left\{x|x\text{는 6보다 작은 2의 배수}\right\}$ 이면 $D = \{2,\ 4\}$ 이다.

15. 집합 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ 에 대하여 $X \subset A$, $\{a,b,c\} \cap X=\{c\}$, $n(X)=2$ 를 만족하는 집합 X 를 모두 나타낸 것은?

① $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{c,f\}$

② $\{c,b\}$, $\{c,e\}$, $\{e,f\}$

③ $\{c,d\}$, $\{d,e\}$, $\{e,f\}$

④ $\{c,d\}$, $\{c,e\}$, $\{c,f\}$

⑤ $\{a,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,f\}$

해설

$\{a,b,c\} \cap X = \{c\}$ 이므로 X 는 c 를 반드시 포함하고 a, b 를 포함하지 않는다.
또 X 는 A 의 부분집합이고 원소의 개수가 2 개 이므로 X 가 될 수 있는 집합은 $\{c,d\}$, $\{c,e\}$, $\{c,f\}$

16. $\{2,\ 3,\ 4\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 A 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중 원소 $2,\ 3,\ 4$ 를 반드시 포함하는 집합이므로
그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

17. 집합 $A=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^5},\ \frac{1}{2^6}\right\}$의 부분집합 X에 대하여 X의 모든 원소의 합이 1보다 작은 X의 개수는? (단, $\varnothing$은 제외)

① 31개 ② 32개 ③ 63개
④ 64개 ⑤ 128개

해설

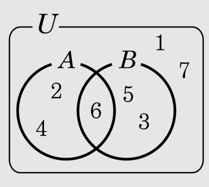
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}=\frac{63}{64}$이므로 원소 1을 제외한 모든 원소가 X의 부분집합이 될 수 있으므로 부분집합 X의 개수는 $2^{7-1}-1=63$(개) ($\because \varnothing$은 제외하므로)

18. 전체집합 $U = \left\{x | x\text{는 } 8 \text{ 미만의 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
$A - B = \{2, 4\}$, $B - A = \{3, 5\}$, $A^c \cap B^c = \{1, 7\}$ 일 때, 집합 B 는?

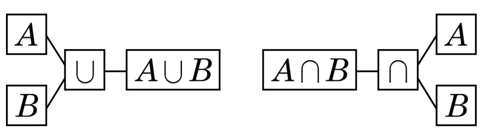
① $\{3, 5\}$　② $\{3, 6\}$　③ $\{3, 6, 7\}$
④ $\{5, 6\}$　⑤ $\{3, 5, 6\}$

해설

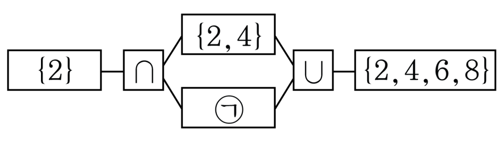
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A^c \cap B^c = \{1, 7\} = (A \cup B)^c$ 이므로 집합 $B = \{3, 5, 6\}$ 이다.



19. 두 집합 A, B 의 합집합과 교집합을 다음 그림과 같이 나타낸다.



아래의 그림에서 집합 ㉠ 의 모든 원소들의 합은?



① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 24

해설

집합 ㉠ $\cap\{2, 4\} = \{2\}$, 집합 ㉠ $\cup\{2, 4\} = \{2, 4, 6, 8\}$ 집합 ㉠ $= \{2, 6, 8\}$
따라서 ㉠의 모든 원소들의 합은 $2 + 6 + 8 = 16$이다.

20. 자연수 N의 배수의 집합을 A_N이라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$을 만족하는 a의 최솟값을 m , $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$을 만족하는 b의 최댓값을 M이라 할 때, $M-m$의 값은?

① -10　② 28　③ 14　④ 10　⑤ -14

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12(\because\ 4, 6$ 의 $L.C.M)$
$(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 2\ (\because\ 4, 6$ 의 $G.C.D)$
$\therefore\ M - m = -10$

21. 두 실수 a, b에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건을 <u>모두</u> 고르면?

① $p : |a| + |b| \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

② $p : a^2 + b^2 \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

③ $p : a + b \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : a^2 + b^2 + 2|ab| \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

⑤ $p : a^3 + b^3 \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

해설

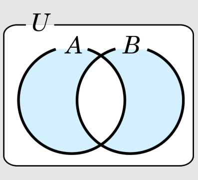
$q \rightarrow p$ 이므로, $\sim p \rightarrow \sim q$ 인지 확인한다.
① $|a| + |b| = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
② $a^2 + b^2 = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
③ $a + b = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 4, b = -4$
④ $a^2 + b^2 + 2|ab| = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$
$\rightarrow$ 참
⑤ $a^3 + b^3 = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 3, b = -3$

22. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$　② $B \subset A$　③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$　⑤ $A \cap B = B$

해설



$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A - B) \cup (B - A) \\
&= B \cap A^c \\
&= B - A
\end{aligned}
$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A-B)\cup(B-A) = B-A$ 에서$(A-B)$와$(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A-B = \varnothing$ 가 되어야 한다. $A-B = \varnothing \leftrightarrow A \subset B$

23. 세 조건 p, q, r 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \rightarrow q$　　② $r \rightarrow \ \sim q$　　③ $p \rightarrow \ \sim r$

④ $q \rightarrow \ \sim r$　　⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \ \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \ \sim r(T) \cdots$ ㉠

$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \ \sim q \rightarrow \ \sim p(T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $r \rightarrow \ \sim q \rightarrow \ \sim p \Rightarrow r \rightarrow \ \sim p(T)$

$\Rightarrow p \rightarrow \ \sim r(T)$

24. 다음은 $|a| < 1,\ |b| < 1,\ |c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

> $abc + 2 > a + b + c$
> $= abc + 1 + 1 - a - b - c$
> $= (1 - ab)(1 - c) + (㉠)$

$|a| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - a < (㉢)$
같은 방법으로 $(㉡) < 1 - b < (㉢)$,
$(㉡) < 1 - c < (㉢)$
또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - ab < (㉢)$
따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (㉠) > (㉡)$
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$
② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$
③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$
④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$
⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$abc + 2 > a + b + c = abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b)$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$
$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$
$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$
또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$
따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$
$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

25. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$

$\frac{n^2}{27} < 1$ 이므로 $n^2 < 27$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5이다.