1. $a > b > 0$ 인 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1+a}$와 $\dfrac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$

② $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

④ $\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$

$(\because a > b > 0)$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$a > b > 0$ 이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1+b}{b}$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

2. $a > 0$ 일 때, $x = \sqrt{a^2+1}$과 $y = a + \frac{1}{2a}$의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $x \le y$ ② $x < y$ ③ $x \ge y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

$x^2 = a^2 + 1$

$y^2 = \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}$,

$\frac{1}{4a^2} > 0$이므로 $y^2 > x^2$

$\therefore y > x$

3. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \le 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \ge 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

4. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
$= 2(|xy| + xy) \geq 0$
$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
그런데 $|x| + |y| \geq 0$, $|x - y| \geq 0$ 이므로
$|x| + |y| \geq |x - y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy > 0$　　② $xy < 0$　　③ $xy \geq 0$
④ $xy \leq 0$　　⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
$|xy| \geq 0$ 이므로
$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

5. 다음 [보기] 중에 x에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x는 실수이다.)

보기

㉠ $x+1>0$

㉡ $x^2-2x+1 \geq 0$

㉢ $x^2<x+12$

㉣ $x^2+1>x$

① ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

㉡ $x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x$는모든실수(절대부등식)

㉢ $x^2<x+12 \Leftrightarrow x^2-x-12<0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4)<0$

$\Leftrightarrow -3<x<4$

㉣ $x^2+1>x \Leftrightarrow x^2-x+1>0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}>0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Leftrightarrow x$는모든실수(절대부등식)

6. 다음은 a, b, c가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

> $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
> ([가]) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ([나])0
> $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
> $a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
> 때 성립)

① $\frac{1}{2}$, $>$ ② $\frac{1}{2}$, $\geq$ ③ 2, $>$ ④ 2, $\geq$ ⑤ 2, $=$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

두식의차를변형하면

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$

$\because$ a, b, c 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0$,

$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때

$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$

성립)

7. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(나)^2}{2}$ 이므로

부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$

② $\geq,\ a - b,\ a = b = 0$

③ $>,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$

④ $>,\ a - b,\ a = b$

⑤ $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 = \dfrac{a}{2} - 2\sqrt{\dfrac{a}{2} \times \dfrac{b}{2}} + \dfrac{b}{2}$

$= \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

(가) , (나)의 결과에서 $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(다) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a = b$일 때 성립한다.

8. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$$

$a > 0,\ b > 0$ 이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{2a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

9. $3a+4b=1$ 일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a>0,\ b>0$)

① 12　　② 24　　③ 36　　④ 48　　⑤ 60

해설

$a>0,\quad b>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$3a+4b=1\geq 2\sqrt{12ab}$

$\frac{1}{2}\geq\sqrt{12ab},\ \frac{1}{48}\geq ab$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$

$ab=\frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore\ \frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}}=2\cdot 2\cdot 12=48$

10. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+12y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로

$$\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+12y\right) = 3+36xy+\frac{1}{xy}+12$$

$$= 15+36xy+\frac{1}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{36\frac{1}{xy}\cdot xy}+15 = 27$$

11. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로

$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x}$에서

$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$

$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$

$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$

12. $a > 0,\ b > 0,\ a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0,\ b > 0$ 일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab},\ 0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

13. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

$lmn = pqr$이다.

따라서, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

14. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

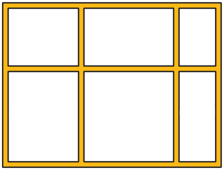
해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$$

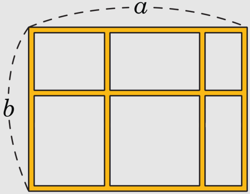
15. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$ ② $(1200, 40)$ ③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$ ⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab}(\because\ 3a + 4b = 240)$

$\therefore\ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240,$

$\therefore\ a = 40$