

1. 일차함수 $y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0

② 3

③ 6

④ -6

⑤ -3

해설

$y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가
 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
 45° 이므로
 $a - 2 = \tan 45^\circ = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
 $b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
 $\therefore a + b = 6$

2. 두 이차함수 $y = -x^2 + 3$ 과 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x 절편은?

- ㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{4}{3}$ ㉢ $\frac{2}{3}$ ㉣ $\frac{1}{2}$ ㉤ $\frac{1}{3}$

해설

$y = -x^2 + 3$ 의 꼭지점은 A(0,3) 이고,
 $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ 이므로 꼭지점은 B(2, -1) 이다.
이 때, 두 점 A(0,3) ,B(2, -1)을 지나는
직선의 방정식은 $y = -2x + 3$
따라서, x 절편은 $0 = -2x + 3$ 에서
 $x = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$ 이다.

3. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
 (가) 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m$, $0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고, m, n 이 서로소이므로 (나) 는 m 의 배수가 된다. 이것은 $0 < m - x < \text{ (다)}$ 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1$, $m - x$, m ② $nx + my = 1$, $m + x$, $2m$
③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, $m - x$, m ④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, $m + x$, $2m$
⑤ $nx + my = 1$, $m + x$, n

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로
 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \cdots \cdots \text{㉠}$
㉠을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면
 $my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

4. 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 라 하자. 이 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?(단, O 는 원점이고 a, b 는 양수이다.)

① 8

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 16

해설

x 절편, y 절편이 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$ 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이다.

이 때, 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \times \frac{3}{b}}$$

($\therefore a, b$ 의 산술기하평균)

따라서 $ab \geq 24$ 이고

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2} \times 24 = 12 \text{ 이다.}$$

따라서, ΔOAB 의 넓이의 최솟값은 12

5. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow a = 7$$

6. 다음은 직선 $x + ay + b = 0$ 이 제 1, 3, 4사분면을 지날 때, ab 의 부호를 조사하는 과정이다.

$a = 0$ 이면 주어진 직선이 제 1, 3, 4사분면을 지날 수 없으므로 $a \neq 0$ 이다.
이 때, 직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 에서
(기울기) (㉠) 0
(y 절편) (㉡) 0
 a (㉢) 0
 b (㉣) 0 이므로 따라서 ab (㉤) 0

위

의 (㉠) ~ (㉤)의 부호가 옳지 않은 것은?

- ① (㉠): >

② (㉡): <

③ (㉢): <

④ (㉣): <

⑤ (㉤): <

해설

직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 의 그래프가
제 1, 3, 4 사분면을 지나려면
기울기는 양수, y 절편은 음수이어야 한다.
(기울기) = $-\frac{1}{a} > 0$
(y 절편) = $-\frac{b}{a} < 0$
 $a < 0, b < 0$ 이므로 $ab > 0$

7. 상수 a, b, c 가 조건 $ab > 0, bc < 0$ 을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$ 이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?

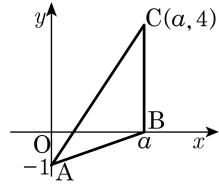
- ① 제 1, 2, 3 사분면 ② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면 ④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$ab > 0, bc < 0$ 이므로
기울기는 (-), y절편은 (-)이다.
 $\therefore$ 제 2,3,4사분면을 지난다.

8. 다음 그림과 같이 점 A(0, -1), B(a, 0), C(a, 4)를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



- ① $y = -\frac{4}{a}x + 4$ ② $y = -\frac{3}{a}x + 3$ ③ $y = -\frac{2}{a}x + 2$
 ④ $y = -\frac{a}{2}x + 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{a}x + 4$

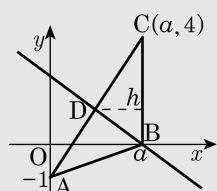
해설

△ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 2a$$

점 B를 지나면서 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 D,

△BCD에서 $\overline{BC}$ 를 밑변으로 보았을 때 높이를 h라 하면



$$(\triangle BCD \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h = 2h$$

이 넓이는 △ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$2h = a \quad \therefore h = \frac{a}{2}$$

따라서 점 D의 x좌표는 $a - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a$

∴ D의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}\right)$

두 점 B(a, 0), D $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 를 지나는

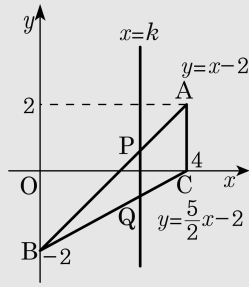
$$\text{직선의 방정식은 } y - 0 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2} - a}(x - a)$$

$$\therefore y = -\frac{3}{a}x + 3$$

9. 세 점 A (4, 2) , B (0, -2), C (4, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x = k$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

- ① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x = k$ 와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P ($k, k - 2$), Q ($k, \frac{1}{2}k - 2$)이다.

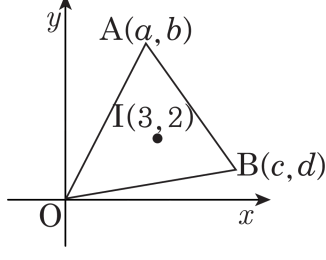
삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ (k - 2) - \left(\frac{1}{2}k - 2 \right) \right\} \times k = 2, \quad k^2 = 8$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 4)$$

10. 그림과 같이 세 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 $(3, 2)$ 이다. $\overline{OA} = \overline{OB}$ 일 때, $\frac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$
 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ 알 수 없다

해설

$\triangle OAB$ 가 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이고,
 $\angle AOI = \angle BOI$ 이므로
 $\overline{OI}$ 는 $\overline{AB}$ 와 수직이다.

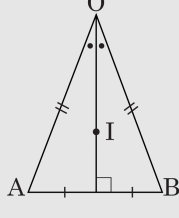
$\overline{OI}$ 의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{b-d}{a-c} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore 3a+2b = 3c+2d$$

$$\therefore \frac{3c+2d}{3a+2b} = 1$$



11. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

12. 두 직선 $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 의 교점과 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + y + 1 = 0$ ③ $x - y - 1 = 0$
④ $x - y + 2 = 0$ ⑤ $x + y + 2 = 0$

해설

두 직선 $2x + y - 4 = 0$ 과 $x - 2y + 3 = 0$ 의

교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + y - 4 + k(x - 2y + 3) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $3 - k = 0$

$$\therefore k = 3$$

$k = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x - y + 1 = 0$

13. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} < m < 1$ ② $-\frac{1}{3} < m < 1$
 ③ $-1 < m < 2$ ④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$
 ⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

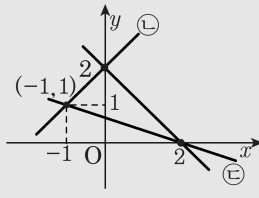
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{L}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{R}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



14. (a, b) 가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

- ① $(1, 1)$ ② $(1, 0)$ ③ $(0, 1)$
④ $(-1, -1)$ ⑤ $(-1, 0)$

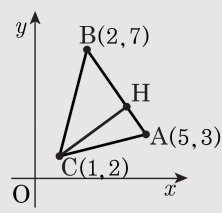
해설

점 (a, b) 가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로
 $a+b-1=0$ 에서 $b=1-a$
이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$
 $\rightarrow (x-y)a+y-1=0$
 $\therefore x-y=0, y-1=0$
즉 $x=y, y=1$
따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

15. $A(5, 3)$, $B(2, 7)$, $C(1, 2)$ 를 삼각형 ABC 의 세 꼭지점이라 할 때, 점 C 에서 직선 AB 에 내린 수선의 길이는?

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

해설



직선 AB 의 방정식은 $4x + 3y - 29 = 0$ 이다. 점 $C(1, 2)$ 에서 직선 AB 에 내린

$$\text{수선의 길이는 } \overline{CH} = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 29|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{19}{5}$$

16. 평행한 두 직선 $12x - 5y = 3$, $12x - 5y = 29$ 사이의 거리를 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 12 ⑤ 26

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점을 택한 후 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$$12x - 5y = 3 \text{ 의 } \left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \frac{|12 \times 0 + \left(-\frac{3}{5}\right) \times (-5) - 29|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

17. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$3x - y - 6 = 0 \text{ , } \quad 3x - y + k = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선

$3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

18. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

19. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

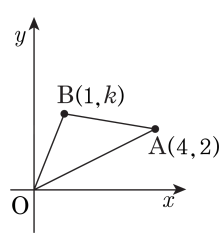
$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

20. 다음 그림과 같이 O(0, 0), A(4, 2), B(1, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



해설

직선 OA의 방정식은 $x - 2y = 0$ 이다.

점 B(1, k)에서 직선 $x - 2y = 0$ 까지의 거리

$$h \text{는 } h = \frac{|1 \times 1 - 2 \times k|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overline{OA} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}} = 4$$

$$\therefore k = \frac{5}{2} \quad (\because k > 0)$$

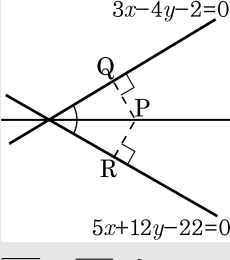
21. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로
 $\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$
 $13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22)$ 또는
 $13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22)$ 정리하면
 $x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
 $\therefore x-8y+6=0$
 $\therefore a+b+c=-1$

22. 점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를 움직일 때, 점 $(a, a + b)$ 의 자취의 방정식은?

- ① $y = 3x - 2$
- ② $y = 4x - 3$
- ③ $y = 5x - 4$
- ④ $y = 6x - 5$
- ⑤ $y = 7x - 6$

해설

$x = a \cdots \textcircled{1}$
 $y = a + b \cdots \textcircled{2}$ 에서
 a, b 를 소거한다.
점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를
움직이므로 $2a - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2a - 2$ 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y = 3a - 2$
 $\therefore y = 3x - 2$ ($\because \textcircled{1}$)